

Apostila para a Disciplina de Lógica para a Computação (INF05508)

Ana Lúcia C. Bazzan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Porto Alegre

Segunda Edição

Agosto de 2001

Capítulo 1

Introdução

1.1 Linguagem Objeto e Metalinguagem

Um linguagem $L1$ com a qual se fazem proposições sobre uma outra linguagem $L2$ é dita uma metalinguagem, enquanto que $L2$ é dita linguagem-objeto. Por exemplo, se utilizarmos a língua portuguesa para ensinar inglês, esta última é a linguagem objeto e a primeira é a metalinguagem.

1.2 Sintaxe e Semântica

A sintaxe de uma linguagem lida apenas com expressões da língua (como palavras, frases, sílabas, etc.) e de como elas são formadas e estão relacionadas. A sintaxe é portanto um sistema (formal) de regras que determina como as expressões da linguagem podem ser formadas a partir de conjuntos de caracteres básicos.

Por outro lado, quando se está interessado no significado das expressões, deve-se fazer um estudo semântico destas. Por semântica de uma linguagem formal entende-se uma teoria baseada em regras de relacionamento entre as expressões da linguagem e determinados objetos (seus significados).

Por exemplo, a frase “Sócrates é um peixe” é sintaticamente correta na língua portuguesa (sujeito, verbo e predicado). Sua correteza semântica porém depende do significado da palavra Sócrates. Se este é um ser que vive no seu aquário, a frase pode ser correta; se é o filósofo grego, não é correta.

1.3 Linguagem Coloquial ou Natural

O “falar”, o “escrever” e o “pensar” estão sempre ligados. Conceitos são geralmente formulados através de palavras e frases. As linguagens como português, inglês, etc. são ditas naturais. Estas têm estrutura próprias que influenciam o modo de pensar das pessoas. Entretanto, nenhuma linguagem natural é inequívoca. Por exemplo, a frase “O homem vê a mulher que observa a estrela sobre a montanha com a luneta” tem, pelo menos, três significados distintos. Para que uma máquina, por exemplo, possa reconhecer não apenas a correteza sintática da frase, mas também entender seu significado, é preciso transformar a frase e representá-la numa linguagem formal como a linguagem da lógica.

1.4 Sistemas e Linguagens Formais

Uma linguagem formal é um conjunto de palavras sobre um alfabeto. Um sistema formal é composto de conjunto de símbolos (caracteres) e um conjunto de regras com os quais se formam determinadas fórmulas que são válidas na linguagem em questão.

1.4.1 Sintaxe de uma Linguagem Formal

Sejam X e Y símbolos gráficos. Uma cadeia é uma sequência finita destes símbolos justapostos. Por exemplo “ab” é uma cadeia de “a” e “b”.

Um alfabeto é um conjunto finito e não vazio de símbolos distintos. Um símbolo gráfico é uma expressão em um alfabeto A se e somente se (sss):

- i) cada elemento de A é um expressão em A ;
- ii) se X e Y são expressões em A , a cadeia formada de X e Y também o é.

Exemplo: seja A um alfabeto que contém somente o símbolo “|”, ou seja $A = \{| \}$. Por i), “|” é uma expressão sobre A . Se “|” e “|” são expressões sobre A , sua cadeia também o é por ii). Portanto “||” é uma expressão sobre A . E assim por diante “|||”, “||||”, etc., são expressões sobre A . Todos os elementos de uma linguagem formal são chamadas de fórmulas.

1.4.2 Semântica de uma Linguagem Formal

Através da semântica define-se um subconjunto da linguagem S composto de fórmulas válidas. Por exemplo, pode-se especificar como válidas, fórmulas cujo comprimento seja múltiplo de 3.

1.5 Estruturas e Avaliação de Argumentos

1.5.1 Estruturas

Um argumento é uma sequência de proposições (também chamadas enunciados), na qual uma das proposições é a conclusão, e as demais são as premissas. Estas servem para fornecer alguma evidência para a conclusão. No exemplo:

“Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Logo, Sócrates é mortal.”

as duas primeiras proposições são premissas a partir das quais se conclui que Sócrates é mortal.

1.5.2 Argumentos Indutivos e Dedutivos

Um argumento dedutivo é aquele cuja conclusão deve ser verdadeira se suas premissas forem verdadeiras, ou ainda, em um argumento dedutivo, é impossível que a conclusão seja falsa se as premissas forem verdadeiras. Um argumento indutivo é aquele cuja conclusão não é necessariamente verdadeira dadas as premissas. Existe uma probabilidade da conclusão ser verdadeira, a qual varia entre 0 e 1.

1.5.3 Exercícios

1. Identifique cada item abaixo é um argumento e em caso afirmativo, quais são as premissas deste.

- a. Ele é do signo de Leão pois nasceu na primeira semana de agosto.
 - b. Como a economia pode ser melhorada? O deficit comercial está crescendo a cada dia!
 - c. Eu não quero posso cursar a disciplina de Lógica. Não acumulei 8 créditos.
 - d. O exército branco estava batendo em retirada. Não vinham reforços. Continuar o ataque seria um ato impensado.
 - e. Ele respira. Deve estar vivo.
 - f. A pesquisa de opinião pública ouviu muita gente. O candidato A deve vencer.
 - g. Os entrevistados não sabem se votam em A ou B.
 - h. O quarteirão não é quadrado. Portanto não se trata de Manhattan.
2. Classifique os seguintes argumentos como indutivos ou dedutivos.
- a. Nenhum mortal pode parar o tempo. Você é mortal. Logo, você não pode parar o tempo.
 - b. Geralmente, quando chove, fica nublado. Está chovendo. Está nublado.
 - c. Não há registros de seres humanos com mais de 3 m. de altura. Nunca tivemos um ser humano com mais de 5 m. de altura.
 - d. Alguns porcos tem asas. Todas as coisas aladas gorgem. Logo, alguns porcos gorgem.
 - e. Cada eleitor, ou é de direita ou de esquerda ou é tolo. O porta-voz da presidência não é de direita. O porta-voz da presidência não é tolo. Logo o porta-voz da presidência é de esquerda.
 - f. Se houver uma guerra nuclear, a civilização será destruída. Haverá uma guerra nuclear. Logo, a civilização será destruída.
 - g. O cloreto de potássio é quimicamente muito similar ao sal de cozinha. Logo, o cloreto de potássio tem sabor igual ao do sal de cozinha.

Capítulo 2

Lógica Proposicional - Sintaxe

A Lógica Proposicional é a teoria mais elementar da Lógica Matemática. Seu conceito básico é o da proposição ou enunciado, isto é, uma afirmação, que pode ser falsa (F) ou verdadeira (V). Uma terceira possibilidade não existe. Se uma proposição não é F ou V , então não é uma proposição no sentido da lógica (como por exemplo a frase “Bom dia”).

Quando afirmamos: “São Paulo é uma cidade grande”, esta é uma proposição lógica pois tem um valor-verdade F ou V .

A Lógica Proposicional utiliza ainda palavras que conectam proposições como “E”, “OU” e “SE-ENTÃO”, bem como o conceito de negação de uma proposição.

2.1 Negação de Proposições

A negação da proposição “São Paulo é uma cidade grande.” é:

- “São Paulo não é uma cidade grande.” ou (melhor)
- “Não é o caso que São Paulo é uma cidade grande.”

2.2 Conectivos

Existem quatro conectivos que unem proposições:

1. “E” representado na linguagem da lógica por $\&$, \wedge (conjunção)
Exemplo: Paulo canta e Pedro toca flauta.
2. “OU” representado por \vee (disjunção)
Exemplo: Paulo canta ou Pedro toca flauta.
3. “SE-ENTÃO” representado por \rightarrow , \supset (implicação)
Exemplo: Se Paulo canta então Pedro toca flauta.
4. “SE E SOMENTE SE” representado por \leftrightarrow (bicondicional ou dupla implicação)
Exemplo: Paulo canta se e somente se Pedro toca flauta.

2.3 Representação Simplificada de Proposições

Todas as proposições podem ser abreviadas sobre um alfabeto dado. Por exemplo, seja $p \equiv$ “Paulo canta” e $q \equiv$ “Pedro toca flauta”.

Os exemplos anteriores abreviados e representados com conectivos ficam:

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $p \rightarrow q$
4. $p \leftrightarrow q$

Ainda: não é o caso que Pedro toca flauta pode ser representado por $\neg p$ ou $\sim p$ de acordo com a notação escolhida.

2.4 Exercícios

1. Qual a diferença entre os itens 3 e 4 da seção 2.2?
2. Traduzir para a linguagem da Lógica utilizando um alfabeto qualquer (indicar qual):
 - a. A criança tem febre e dor de garganta.
 - b. Chove e neva.
 - c. 18 é múltiplo tanto de 3 quanto de 2.
 - d. Ela não é apenas bonita mas também inteligente.
 - e. 2 é um número par primo.
 - f. O ônibus pára quando alguém quer descer ou subir.
 - g. A criança como chocolate ou bombom ou ambos.
 - h. Se um número é múltiplo de 10, então é múltiplo de 5.
 - i. Se o trem passa, a cancela fica abaixada.
 - j. O semáforo fica verde se e somente se o trem não passa.
 - k. Somente se o trem passa a cancela fica abaixada.
 - l. Paulo canta ou Paulo não canta.
 - m. Se Paulo canta, então Paulo canta.

2.5 O Sistema S_0

2.5.1 Regras para formação de fórmulas bem formadas (well-formed formulas)

Já foi visto que uma fórmula é uma cadeia de caracteres. Uma fórmula bem formada (cuja abreviação é wff) é uma fórmula válida no sistema em questão, i.e., formada segundo as regras de formação. Para o sistema S_0 , tais regras são dadas abaixo:

- i) Todas fórmulas são cadeias formadas a partir dos 8 símbolos: $p, q, r, s, (,), \rightarrow, \neg$
- ii) Definição: p, q, r, s são wff
- iii) Se p e q são wff, então $(p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q)$ e $(p \leftrightarrow q)$ são wff's
- iv) Se p é uma wff, $\neg p$ é uma wff

Exemplos de wff's no S_0 :

- $(p \rightarrow q)$
- $\neg(\neg(r \rightarrow s) \rightarrow \neg\neg p)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
- $(r \rightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s))$
- $\neg(r \rightarrow p)$
- $\neg r$
- s
- $\neg\neg p$
- $\neg\neg\neg(p \rightarrow q)$

Contra exemplos de wff's no S_0 :

- $\neg(\neg p)$
- $p \rightarrow q$
- $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q)$
- $p \rightarrow (q)$
- $)p($
- \rightarrow

2.5.2 Axiomas do Sistema S_0

Este sistema tem apenas 3 axiomas (que são wff's), a partir dos quais se pode gerar uma prova. São eles:

- A1: $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
- A2: $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
- A3: $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$

2.5.3 Regras de Inferência no Sistema S_0

O sistema S_0 tem apenas 2 regras de inferência

1. *Modus Ponens* (MP) ou eliminação da implicação. A regra MP permite que, tendo-se ao menos dois passos em uma prova (por exemplo dois axiomas) e, sendo um deles o resultado de se colocar o símbolo de implicação (\rightarrow) após o outro seguindo-se então uma wff, se possa inferir esta wff. Em termos formais a regra seria:

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ (p \rightarrow q) \end{array}}{q} \quad (2.1)$$

também representada $p, (p \rightarrow q) \vdash q$ ou ainda

$$\begin{array}{c} p \\ (p \rightarrow q) \\ \hline \therefore q \end{array} \quad (2.2)$$

Esta regra é utilizada rotineiramente também fora da linguagem da lógica. Exemplos:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{Há um incêndio} \\ \text{Se há um incêndio, então os bombeiros vêm} \end{array} \quad \begin{array}{c} [p] \\ [(p \rightarrow q)] \end{array}}{\text{Os bombeiros vêm} \quad [q]} \quad (2.3)$$

Pode-se diagramar a regra MP da seguinte forma:

$$\frac{\square(\square \rightarrow \bigcirc)}{\bigcirc} \quad (2.4)$$

onde \square e \bigcirc são quaisquer wff's válidas no S_0 .

Por exemplo:

$$\frac{\begin{array}{c} \square \\ (p \rightarrow (q \rightarrow p)) \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))) \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)) \end{array}}{\begin{array}{c} ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)) \\ \bigcirc \end{array}} \quad (2.5)$$

2. Regra de Substituição

Esta regra permite substituir p , q , r e s por quaisquer wff's. Deve-se ter o cuidado de substituir todas as ocorrências de uma daquelas letras por uma dada wff.

2.6 Provas no Sistema S_0

Provas são uma sequência de wff's (axiomas ou derivações). A partir de axiomas e de um conjunto de regras de inferência, estabelece-se uma sequência de prova.

Exemplos de provas:

2.7. TRADUÇÃO E FORMALIZAÇÃO DE SENTENÇAS DA LÍNGUA NATURAL EM FÓRMULAS

- i) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ [prova formada apenas por um axioma (A1)]
- ii) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ [axioma A1]
 $(p \rightarrow (r \rightarrow p))$ [instância de A1 com q substituído por r]
 $(r \rightarrow (r \rightarrow r))$ [A1 com p e q substituído por r]
 $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ [axioma A3]
- iii) $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ [A3]
 $((\neg \neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$ [A3 com p substituído por $\neg p$]
 $((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg p))$ [A3 com p por $\neg p$ e q por $\neg \neg p$]
- iv) 1. $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ [A1]
2. $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$ [1, substituição]
3. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ A2
4. $((p \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ [3, substituição]
5. $((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p)))$ [4, substituição]
6. $((p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p))$ [2, 5, MP]

2.7 Tradução e Formalização de Sentenças da Língua Natural em Fórmulas bem Formadas em S_0

- a. Se Paulo não está doente, então, se ele não está na escola, ele está jogando.
 $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$
- b. $\underbrace{\text{O time A vencerá}}_p$ se $\underbrace{\text{o time B não tomar cuidado}}_{\neg q}$
 $(\neg q \rightarrow p)$
- c. O time A vencerá somente se o time B não tomar cuidado
 $(p \rightarrow \neg q)$
- d. $\underbrace{\text{Nós te visitaremos}}_p$ caso $\underbrace{\text{passemos por Porto Alegre}}_q$
 $(q \rightarrow p)$
- e. Paulo não fuma
 $\neg p$
- f. Se Paulo é uma pessoa honesta, não é preso.
Paulo é preso.
Logo, Paulo não é uma pessoa honesta.
 $(p \rightarrow \neg q)$
 q
 $\therefore \neg p$

g. Se o espaço é tridimensional então não é bidimensional.

O espaço é bidimensional.

Logo, o espaço não é tridimensional.

$(p \rightarrow \neg q)$

q

$\therefore \neg p$

Nota: os itens f) e g) tem a mesma formalização. Entretanto f) é mais aceitável que g).

2.8 Exercícios

1. Formalize as sentenças seguintes no sistema S_0

- a. Nós iremos à praia desde que não chova.
- b. Se você seguir as instruções, não se sairá mal.
- c. O cão não foi maltratado.
- d. Se ele mover seu bispo se eu mover meu peão, então, se eu não perder minha rainha, eu devo ganhar dele.
- e. Todos os ratos são mortais.
- f. Se eu perder meu trem, eu posso chegar apenas 5 minutos atrasada, desde que o próximo trem esteja no horário.
- g. Paulo não tem mais de 2 metros, a menos que tenha crescido.

2. Formalize as seguintes inferências no sistema S_0 . Quais delas parecem logicamente válidas?

- a. Se hoje é segunda-feira, então amanhã não é quarta-feira. Logo, se amanhã é quarta-feira, hoje não é segunda-feira.
- b. Não é o caso que o homem vive só de pão. Logo, o homem vive só de pão.
- c. Se matar é errado, tentar matar é errado. Se tentar matar é errado, apenas pensar em matar é errado. Logo, se matar é errado, apenas pensar em matar é errado.
- d. Se Deus está morto, então tudo é permitido. Deus não está morto. Logo, não é o caso que tudo é permitido.
- e. Não é o caso que se Deus está morto, então tudo é permitido. Logo, Deus está morto.
- f. Se as rosas são vermelhas se as violetas são azuis, então as violetas são azuis. Logo, as violetas são azuis.

3. Quais das seguintes são wff's no sistema S_0 ?

- a. r
- b. $\neg\neg(p)$

- c. $(p \rightarrow (q \rightarrow t))$
- d. $(q \rightarrow (r \rightarrow s))$
- e. $\neg\neg p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow p))$
- f. $((p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg\neg s) \rightarrow \neg(p \rightarrow p)$
- g. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- h. $(p \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow p)))$

4. Encontre provas para as fórmulas seguintes em S_0 (anote a regra utilizada)

- a. $(p \rightarrow (r \rightarrow (r \rightarrow r)))$
- b. $((\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- c. $(p \rightarrow p)$
- d. $(\neg q \rightarrow (q \rightarrow p))$
- e. $((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q)))$

2.9 O Sistema de Dedução Natural (S.D.N.)

2.9.1 Introdução

O sistema S_0 não é muito poderoso para representar de fato como é a estrutura de um argumento. O Sistema de Dedução Natural procura contornar essa deficiência. No Sistema de Dedução Natural, não apenas p, q, r, s são letras possíveis no alfabeto (e consequentemente wff's), mas também qualquer letra a, b, c, \dots, z ou $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \dots, z_n$.

Esta é uma das convenções possíveis para Σ (o alfabeto). Outras podem ser utilizar letras maiúsculas, gregas, etc.

Além da implicação (\rightarrow) e da negação (\neg), o Sistema de Dedução Natural inclui outros conectivos: “e” lógico ($\wedge, \&$), “ou” lógico (\vee) e a dupla implicação (\leftrightarrow).

Neste sistema, se ϕ e ψ são wff's então também são wff's: $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $\neg\phi$, $\neg\psi$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

2.9.2 Regras Não Hipotéticas de Inferência

O Sistema de Dedução Natural não é axiomático. Para as provas, não se parte de axiomas mas sim de premissas dadas ou de hipóteses formuladas.

Quanto às regras de dedução/inferência, existem 10 regras básicas, correspondendo à eliminação e introdução de cada conectivo/operador.

Eliminação da Implicação (*Modus Ponens* ou MP)

De uma implicação e seu antecedente $[(\phi \rightarrow \psi)]$, pode-se concluir seu consequente $[\psi]$.

Exemplo:

Prove: $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg p, q \vdash r$

1. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ [PREM]
2. $\neg p$ [PREM]
3. q [PREM]
4. $(q \rightarrow r)$ [1,2,MP]
5. r [3,4,MP]

Eliminação da Negação ($\neg E$)

De uma wff na forma $\neg\neg\phi$, pode-se inferir ϕ .

Exemplo:

Prove $(\neg p \rightarrow \neg\neg q), \neg\neg\neg p \vdash q$

1. $(\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ [PREM]
2. $\neg\neg\neg p$ [PREM]
3. $\neg p$ [2, $\neg E$]
4. $\neg\neg q$ [1, 3, MP]
5. q [4, $\neg E$]

Introdução da Conjunção ($\wedge I$)

De quaisquer wff's ϕ, ψ , podemos inferir $(\phi \wedge \psi)$.

Eliminação da Conjunção ($\wedge E$)

De uma wff da forma $(\phi \wedge \psi)$ podemos inferir qualquer elemento da conjunção.

Exemplo:

Prove $(p \rightarrow (q \wedge r)), p \vdash (p \wedge q)$

1. $(p \rightarrow (q \wedge r))$ [PREM]
2. p [PREM]
3. $(q \wedge r)$ [1, 2, MP]
4. q [3, $\wedge E$]
5. $(p \wedge q)$ [2, 5, $\wedge I$]

Introdução da Disjunção ($\vee I$)

De uma wff ϕ , podemos inferir a disjunção de ϕ com qualquer wff. (ϕ pode ser o primeiro ou o segundo elemento da disjunção)

Exemplo:

Prove $p \vdash ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

1. p [PREM]
2. $(p \vee q)$ [1, $\vee I$]
3. $(p \vee r)$ [1, $\vee I$]
4. $(p \vee r) \wedge (p \vee q)$ [2, 3, $\wedge I$]

Eliminação da Disjunção ($\vee E$)

De wff's da forma $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \chi)$ e $(\psi \rightarrow \chi)$, podemos inferir a wff χ .

Exemplo:

Provar o argumento:

Hoje é sábado ou domingo.
 Se é sábado, então é fim de semana.
 Se é domingo, então é fim de semana.
 Logo, hoje é fim de semana.

cuja formalização é: $(s \vee d), (s \rightarrow f), (d \rightarrow f) \vdash f$

1. $(s \vee d)$ [PREM]
2. $(s \rightarrow f)$ [PREM]

3. $(d \rightarrow f)$ [PREM]
4. f [1, 2, 3, $\vee E$]

Eliminação do Bicondicional ($\leftrightarrow E$)

De wff's da forma $(\phi \leftrightarrow \psi)$, podemos inferir as wff's $(\phi \rightarrow \psi)$ e/ou $(\psi \rightarrow \phi)$.

Introdução do Bicondicional ($\leftrightarrow I$)

De wff's da forma $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\psi \rightarrow \phi)$, podemos inferir $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

Exemplo :

Prove $(f \leftrightarrow (s \vee d)), s \vdash f$

1. $(f \leftrightarrow (s \vee d))$ [PREM]
2. s [PREM]
3. $(f \rightarrow (s \vee d))$ [1, $\leftrightarrow E$]
4. $((s \vee d) \rightarrow f)$ [1, $\leftrightarrow E$]
5. $(s \vee d)$ [2, $\vee I$]
6. f [4, 5, MP]

2.9.3 Exercícios

1. Prove os seguintes argumentos:

- a. $(p \wedge q) \vdash (q \wedge p)$
- b. $((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)), \neg \neg p, q \vdash s$
- c. $p \vdash (p \wedge p)$
- d. $p, \neg \neg(p \rightarrow q) \vdash (q \vee \neg q)$
- e. $p, \neg \neg(p \rightarrow q) \vdash ((r \wedge s) \vee q)$
- f. $p \vdash (p \vee p)$
- g. $(p \vee q) \wedge (p \vee r), (p \rightarrow s), (q \rightarrow s), (p \rightarrow t), (r \rightarrow t) \vdash (s \wedge t)$
- h. $(p \vee p), (p \rightarrow (q \wedge r)) \vdash r$
- i. $(p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \vdash (p \leftrightarrow q)$
- j. $(p \leftrightarrow q) \vdash (q \leftrightarrow p)$

2.9.4 Regras Hipotéticas

Além das regras não hipotéticas, o Sistema de Dedução Natural admite que se introduzam hipóteses no processo de prova.

Exemplo:

1. $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ [HIP]
2. $(p \rightarrow q)$ [HIP]
3. p [HIP]
4. q [2, 3, MP]
5. $(q \rightarrow r)$ [1, 3, MP]
6. r [4, 5, MP]
7. $(p \rightarrow r)$ [3-6, PC]
8. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ [2-7, PC]
9. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ [1-8, PC]

Prova do Condicional ou Introdução da Implicação (PC)

Podemos associar cada hipótese à sua conclusão/derivação através desta regra: dada uma derivação de uma wff ψ a partir de uma hipótese ϕ , podemos descartar a hipótese e inferir a wff $(\phi \rightarrow \psi)$ (implicação da hipótese com sua derivação).

Exercícios

1. Prove os seguintes argumentos:

- a. $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- b. $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$
- c. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Observações Sobre a Regra PC

Atenção aos erros frequentes no uso da regra PC, como por exemplo, a inobservância da subordinação entre hipóteses e derivações:

1. q [hip p/ PC]
2. $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$ [hip p/ PC]
3. $(p \rightarrow q)$ [hip p/ PC]
4. r [2,3, MP]

Não se pode terminar a prova com a dedução de r desta forma pois a dedução do passo 4 foi feita unicamente sobre hipóteses. O processo de prova deve ir adiante, por exemplo, como se segue:

5. $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$ [3, 4, PC]

...

Exercício

1. Prove os seguintes argumentos no Sistema de Dedução Natural:

- a. $(p \vee q) \vdash (q \vee p)$
- b. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash (p \wedge (q \vee r))$

Redução ao Absurdo - RAA

Esta regra também é chamada de Prova Indireta ou **Introdução da Negação**. Para provar uma conclusão (em geral, negada) por RAA, introduzimos como **hipótese** tal **conclusão sem a negação**. Depois, derivamos uma **contradição**, o que mostra que a hipótese é falsa. Disto segue-se que aquela conclusão negada é verdadeira. Uma contradição é qualquer wff da forma $(\phi \wedge \neg\phi)$, ou seja, uma conjunção onde um conjuncto é a negação do outro (ϕ pode ser uma wff atômica ou composta). Formalmente, a regra RAA pode ser estabelecida como: **de uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese ψ , podemos descartar a hipótese e concluir $\neg\psi$** .

Exemplo: prove o argumento $(p \rightarrow q), \neg q \vdash \neg p$

1. $(p \rightarrow q)$ [prem]
2. $\neg q$ [prem]
3. p [hip p/ RAA]

- | | |
|-------------|---------------------|
| 4. q | [1, 3, MP] |
| 5. $\neg q$ | [2, 4, $\wedge I$] |
| 6. $\neg p$ | [3-5, RAA] |

Exercício

1. Prove os seguintes argumentos no Sistema de Dedução Natural

- $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
- $\neg p \rightarrow p \vdash p$
- $\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p \vdash q$
- $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$
- $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$
- $(\neg p \vee \neg q) \vdash \neg(p \wedge q)$

Observações Sobre o Uso de Regras Hipotéticas

- identificar as hipóteses e suas derivações; cada subprova termina apenas quando a hipótese for descartada
- nenhuma ocorrência de uma wff dentro de uma derivação ou de uma subprova pode ser citada após esta subprova estar terminada
- se mais de uma hipótese for vigente simultaneamente, a ordem de descarte deve ser inversa à ordem de introdução da hipótese na prova (i.e. em uma cadeia de hipóteses, a última hipótese introduzida deve ser a primeira a ser descartada)
- uma prova não está completa até que todas as hipóteses tenham sido descartadas

Estratégias Usadas em Provas

Em princípio, não há uma maneira correta de se construir uma prova. Uma fórmula pode ser provada por diversas seqüências de fórmulas derivadas de diversas regras. Entretanto, algumas estratégias para construção de provas podem ser usadas:

- para provar uma fórmula atômica: se nenhuma regra é imediata, tente colocar a negação da fórmula como hipótese para RAA
- para provar uma fórmula negada: use a fórmula sem negação como hipótese para RAA
- para provar uma conjunção: prove cada elemento da conjunção separadamente
- para provar uma disjunção: tente provar um dos elementos da disjunção e aplicar a regra da introdução da disjunção
- se houver uma premissa disjuntiva: tente provar os condicionais necessários para obter a conclusão através do uso da regra da eliminação da disjunção
- para provar um condicional: coloque seu antecedente como hipótese e tente derivar o conseqüente através da regra da prova do condicional

- g. para provar um bicondicional: use a regra da prova do condicional duas vezes e depois a regra de introdução do bicondicional

2.9.5 Completude e Consistência

As dez regras básicas de inferência são **completas**: podem gerar, garantidamente, uma prova para cada uma das formas de argumento *válidas* do Sistema Natural de Dedução. Estas regras também são **consistentes** no sentido que, quando aplicadas sobre premissas válidas, irão derivar somente conclusões válidas.

2.9.6 Regras Derivadas

Modus Tollens - MT

Já foi visto que argumentos do tipo $(p \rightarrow q), \neg q \vdash \neg p$ são válidos (rever exemplo quando da apresentação da regra RAA). Uma instância desse argumento é: Se chove, então faz frio. Não é o caso que faz frio. Logo, não chove.

Esse argumento é a base da regra MT: de wffs $(\phi \rightarrow \psi)$ e $\neg\psi$, pode-se inferir $\neg\phi$.

Exemplo do uso de MT: prove o argumento $(a \vee b), \neg c \vdash (\neg\neg c \rightarrow \neg(a \vee b))$

1. $(a \vee b) \rightarrow \neg c$ [prem]
2. $\neg\neg c$ [hip p/ PC]
3. $\neg(a \vee b)$ [1, 2, MT]
4. $\neg\neg c \rightarrow \neg(a \vee b)$ [2-3, PC]

Silogismo Hipotético - SH

Já foi visto que um argumento do tipo $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow r)$ é válido (rever exemplo na seção Prova do Condicional). Essa regra é chamada de silogismo hipotético: de wffs de formas $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\psi \rightarrow \chi)$ pode-se inferir $(\phi \rightarrow \chi)$.

Silogismo Disjuntivo - SD

Formalmente, a regra do SD é: de wffs $(\phi \vee \psi)$ e $\neg\phi$, infere-se ψ . Uma instância desse argumento é: Chove ou neva. Não é o caso que chove. Logo, neva.

Absorção - ABS

Formalmente, a regra ABS é: de uma wff da forma $(\phi \rightarrow \psi)$, infere-se $(\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$.

Dilema Construtivo - DC

Formalmente, esta regra é: de wffs de formas $(\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \chi)$ e $(\psi \rightarrow \omega)$, pode-se inferir $(\chi \vee \omega)$.

Reiteração - RE

Formalmente, esta regra é: de qualquer wff ϕ infere-se ϕ desde que ϕ não seja parte de uma derivação hipotética cuja hipótese já tenha sido descartada.

Exemplo 1: prove o argumento $p \vdash p$

1. p [prem]

2. p [1, RE]
 Exemplo 2: prove o argumento $p \vdash q \rightarrow p$
 1. p [prem]
 2. q [hip. p/ PC]
 3. p [1, RE]
 4. $q \rightarrow p$ [2-3, PC]

Contradição - CONTRAD

Formalmente, esta regra é: de wffs ϕ e $\neg\phi$ infere-se qualquer wff.

Exercícios

1. prove a regra do silogismo disjuntivo usando regras derivadas
2. prove a regra da contradição usando regras derivadas
3. prove o argumento: $p, \neg p \vdash q$

2.9.7 Teoremas do Cálculo Proposicional

Teoremas são wff's que podem ser provadas sem a introdução de premissas (suposições hipotéticas). Suas provas são, portanto, feitas através de hipóteses para PC ou RAA.

Exemplo: prove o teorema $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

Podemos desenvolver esta prova de duas formas: a primeira usando somente as regras básicas; a segunda usando a regra derivada CONTRAD.

1. $(p \wedge \neg p)$ [HIP p/ RAA]
 2. $\neg(p \wedge \neg p)$ [1-1, RAA]
- ou
1. $(p \wedge \neg p)$ [HIP p/ RAA]
 2. p [1, \wedge E]
 3. $\neg p$ [1, \wedge E]
 4. $\neg(p \wedge \neg p)$ [2,3, CONTRAD]
 5. $\neg(p \wedge \neg p) \wedge (p \wedge \neg p)$ [1,4, \wedge I]
 6. $\neg(p \wedge \neg p)$ [1-5, RAA]

2.9.8 Exercícios

1. Prove o teorema: $\vdash (p \rightarrow (p \vee q))$
2. Prove o teorema: $\vdash (p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$

2.9.9 Equivalências

Uma equivalência é uma wff na forma de um bicondicional e que é um teorema no Sistema de Dedução Natural. Se $(\phi \rightarrow \psi)$ é uma equivalência, então ϕ e ψ são interderiváveis. Por exemplo p e $\neg\neg p$ são interderiváveis. Como exercício, prove o teorema $\vdash (\neg\neg p \leftrightarrow p)$. Muitas equivalências tem nomes particulares como:

- De Morgan: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

- De Morgan: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- Comutatividade: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
- Comutatividade: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
- Associação: $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
- Associação: $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
- Distribuição: $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
- Distribuição: $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- Transposição: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- Implicação Natural: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- Exportação: $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- Tautologia: $p \leftrightarrow (p \wedge p)$
- Tautologia: $p \leftrightarrow (p \vee p)$

Pode-se utilizar a interderivação de equivalências em processos de provas: qualquer um dos lados da equivalência pode ser substituído pelo outro. Por exemplo, como a equivalência $p \leftrightarrow \neg\neg p$ (dupla negação ou DN) estabelece a interderivabilidade entre p e $\neg\neg p$, também garante que, tendo-se a wff $(q \rightarrow p)$ em uma prova, se possa derivar a wff $(q \rightarrow \neg\neg p)$. Toda equivalência pode ser tratada como uma regra de inferência que nos permite substituir cada uma das wff's interderiváveis por uma outra.

Formalmente, se ϕ e ψ são interderiváveis e ϕ é uma subwff da wff χ , então de χ podemos inferir o resultado de se substituir uma ou mais ocorrência de ϕ por ψ em χ .

Exemplo: prove o argumento $(p \vee q), \neg q \vdash p$

1. $(p \vee q)$ [prem]
2. $\neg q$ [prem]
3. $(q \vee p)$ [1, comutatividade]
4. p [2,3,SD]

2.9.10 Exercícios

1. Desenvolver as provas de cada uma das equivalências apresentadas.
2. Prove o argumento: $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash \neg p \rightarrow (q \wedge r)$
3. Prove o argumento: $(\neg p \vee \neg q), (r \rightarrow p), (\neg\neg q \vee \neg s) \vdash (\neg s \vee \neg r)$

Capítulo 3

Lógica Proposicional - Semântica

3.1 Introdução e Conceitos Básicos

Já vimos que **Sintaxe** refere-se à técnicas de inferência baseadas nas estruturas formais dos argumentos e nada diz a respeito da validade dos argumentos. Além disto, não estabelece um teste sistemático da validade ou invalidade dos argumentos.

Já a **Semântica** (significado) refere-se à interpretação dos operadores da lógica proposicional e contribui para a determinação da verdade ou falsidade da sentenças em uma expressão. Já vimos também que os enunciados ou proposições podem ser:

- a. simples (se não contém outras proposições) como por exemplo “os testes nucleares terminarão”, “este planeta se tornará inabitável”
- b. compostos (se contém mais de uma proposição) como por exemplo: “os testes nucleares terminarão ou este planeta se tornará inabitável”, “as rosas são vermelhas e os cravos são brancos”

Note que a proposição “João e Maria são gêmeos” é simples e não composta.

Na lógica proposicional clássica assume-se que:

- a. nenhum enunciado tem mais de um valor verdade (princípio da bivalência)
- b. os valores verdade dos componentes de uma proposição determinam o valor verdade da proposição (conjunção, disjunção, etc. satisfazem esta hipótese)

Vimos também que os enunciados ou proposições admitem apenas um valor verdade (V.V.): falso ou verdadeiro. Assim, os enunciados abaixo tem os seguintes V.V.:

- $2 + 2 = 4$ (verdadeiro)
- $2 + 2 = 22$ (ambíguo!)
- Hoje é quinta-feira (pode ser falso ou verdadeiro)
- Lógica é fácil (verdadeiro)

Apenas a título de introdução, vamos citar outras lógicas que não necessariamente utilizam as hipóteses acima:

- Lógica de Predicados: por exemplo “Todos os homens são sábios” é uma proposição desta lógica

- Lógica Modal: “João acredita que a lua não é habitada” (isto é equivalente a João acredita que p). O valor verdade desta sentença / proposição não é determinado pelo valor verdade de p ; João pode acreditar que seja verdade (a proposição será verdadeira) mesmo que p seja falsa.

Um outro conceito relacionado é o de **paradoxos** como por exemplo “Esta sentença é falsa”. Se o valor verdade da sentença é V então a sentença é falsa; se o valor verdade da sentença é F então a sentença é verdadeira.

3.2 Tabela Verdade

Estudaremos aqui a semântica de cada operador e apresentaremos as tabelas-verdade para cada caso.

3.2.1 Negação (\neg, \sim)

p	$\neg p$
V	F
F	V

A semântica deste operador é a seguinte: quando p é V , $\neg p$ é F ; quando p é F , $\neg p$ é V .

Exemplos:

$p \equiv$ “a água é quente”

$\neg p \equiv$ “a água é fria”

$\neg p \equiv$ não é verdade que “a água é quente”

3.2.2 Conjunção ($\wedge, \&$)

p	q	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo:

$p \equiv$ “chove”

$q \equiv$ “faz sol”

$(p \wedge q) \equiv$ “chove” e “faz sol”

Se não chove, mesmo que faça sol, ainda assim o valor-verdade da conjunção é F .

3.2.3 Disjunção (\vee)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:

$p \equiv$ “chove”

$q \equiv$ “faz sol”

Se chove, $(p \vee q)$ é V

Se faz sol mas não chove, $(p \vee q)$ é V

Se chove e faz sol, $(p \vee q)$ é V

Se está nublado (não chove e não faz sol), $(p \vee q)$ é F

3.2.4 Ou exclusivo (\oplus)

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:

$p \equiv$ “Maria nasceu em Porto Alegre”

$q \equiv$ “Maria nasceu em Rio Grande”

Maria não pode ter nascido em Porto Alegre e em Rio Grande, logo $(p \oplus q)$ é F

Se Maria nasceu em Porto Alegre, $(p \oplus q)$ é V

Se Maria nasceu em Caxias, $(p \oplus q)$ é F

3.2.5 Implicação (\rightarrow, \supset)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Vamos discutir alguns exemplos envolvendo a implicação:

Exemplo 1:

$p \equiv$ “ x é múltiplo de 10”

$q \equiv$ “ x é múltiplo de 5”

$(p \rightarrow q) \equiv$ “se x é múltiplo de 10 então x é múltiplo de 5”

se p é V e q é V então $(p \rightarrow q)$ é V (e.g. $x = 20$)

Se p é F e q é F então $(p \rightarrow q)$ é V (e.g. $x = 32$)

Se p é F e q é V então $(p \rightarrow q)$ é V (e.g. $x = 25$)

Se p é V e q é F então $(p \rightarrow q)$ é F (ache um x que satisfaça!)

A implicação também pode ser lida: não é o caso que p e não q ,

ou seja: $(p \rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge q)$

Exemplo 2:

O pai promete à Paulo: “Se você tirar 10 na prova, eu compro uma bicicleta”.

$p \equiv$ “Paulo tira 10 na prova”

$q \equiv$ “o pai compra uma bicicleta para Paulo”

Consideremos as seguintes possibilidades:

1. Paulo tira 10 (p é V) e o pai compra uma bicicleta para Paulo” (q é V).

Assim, a declaração do pai ($p \rightarrow q$) é V

2. Paulo tira 10 (p é V) e o pai não compra uma bicicleta para Paulo (q é F).

Assim, a declaração do pai ($p \rightarrow q$) é F

3. Paulo não tira 10 (p é F) e o pai compra uma bicicleta para Paulo (q é V).

Logo, a declaração do pai ($p \rightarrow q$) é V , pois ele cumpriu sua parte mesmo que o filho não tenha tirado 10 (talvez o pai tenha se contentado com uma nota 8 ou deu a bicicleta por outro motivo; não invalida a declaração).

4. Paulo não tira 10 (p é F) e o pai não compra uma bicicleta para Paulo (q é F).

Assim, a declaração do pai ($p \rightarrow q$) é V

Exemplo 3:

se a terra é um planeta, então $2 + 2 = 4$. (V)

se a terra é um cometa, então $2 + 2 = 4$. (V)

se a terra é um cometa, então $2 + 2 = 9$. (V)

se a terra é um planeta, então $2 + 2 = 9$. (F)

3.2.6 Dupla implicação (\leftrightarrow)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo:

Se, e somente se, João tirou um nota 10, ganha uma bicicleta ($p \leftrightarrow q$), ou seja, João tirou nota 10 se ganhou uma bicicleta e João ganhou uma bicicleta se tirou 10.
 $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

“Quando o circuito se fecha, passa corrente e passa corrente quando o cricuito se fecha”
 $(f \leftrightarrow c)$

3.2.7 Exercício

1. Provar a equivalência do exemplo 1 da implicação simples usando a tabela verdade.
2. Provar a equivalência do exemplo da dupla implicação usando tabela-verdade
3. Provar que $(p \rightarrow q)$ também pode ser representado por $(\neg p \vee q)$
4. Provar que $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

5. Construa a tabela verdade para as seguintes proposições:

- a. $(\neg p \vee q)$
- b. $\neg(p \rightarrow q)$
- c. $(p \rightarrow q) \wedge q$
- d. $\neg\neg p$
- e. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
- f. $p \vee \neg p$
- g. $p \wedge \neg p$

3.3 Verdade e Validade

Uma proposição pode ser V ou F, enquanto que um argumento (ou argumentação) pode ser válida ou inválida.

Exemplos relacionando verdade ou falsidade com validade ou invalidade:

Todos os morcegos são mamíferos. (*V*)

Todos mamíferos tem pulmões. (*V*)

Logo, todos os morcegos tem pulmões. (*V*)

O argumento é válido e todas proposições são verdadeiras.

Todas trutas são mamíferos. (*F*)

Todos mamíferos tem asas. (*F*)

Logo, todas as trutas tem asas (*F*)

Este argumento é válido porque se as premissas fossem verdadeiras a conclusão também seria.

Se x é presidente da república, então x é famoso. ($p \rightarrow q$)

x não é presidente da república ($\neg p$)

Logo, x não é famoso ($\neg q$)

Este argumento é inválido pois se pode encontrar um argumento da mesma forma que não é válido:

Se Olívio é presidente, então é famoso.

Olívio não é presidente.

Olívio não é famoso.

A falsidade de um conclusão não garante a invalidade de um argumento. Mas: a conclusão sendo falsa implica que, ou o argumento é inválido, ou pelo menos uma de suas premissas é falsa.

Como no exemplo c) as premissas são ambas verdadeiras, e a conclusão é falsa, o argumento é inválido.

Para uma conclusão ser verdadeira, o argumento tem que ser válido e as premissas devem ser verdadeiras.

3.4 Tabelas-Verdade para Formas de Argumento

As tabelas-verdade podem ser usadas como um método para testar a validade dos argumentos contendo proposições cujos valores-verdade são determinados pelos V.V. de seus

componentes.

Para a determinação de argumentos com a mesma forma, vejamos um exemplo que tem a proposição u como “A OTAN respeitará a decisão da ONU” e a proposição w como “Haverá uma guerra nos Balcãs”. Um silogismo disjuntivo tem a forma:

$$p \vee q$$

$$\neg p$$

$$\therefore q$$

Assim, um argumento com a mesma forma para o exemplo acima é:

$$u \vee w$$

$$\neg u$$

$$\therefore w$$

Se uma forma de um argumento tem alguma substituição onde as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa, o argumento é inválido (refutação por analogia lógica).

Para determinar a validade de uma forma de argumento, devemos examinar todas as instâncias (substituições) possíveis e ver se alguma tem premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Dado o Silogismo Disjuntivo:

$$(p \vee q)$$

$$\frac{\neg p}{q}$$

$$q$$

- a) testar todas as instâncias (!) ou
- b) testar todos os arranjos na tabela verdade

p	q	$p \vee q$	$\neg p$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Existe alguma instância na qual a conclusão seja F e as premissas sejam, ambas, V ???

Se não existe, o argumento é válido.

3.5 Exercícios

1. Verifique a validade das seguintes formas de argumentos:

- a. *Modus Ponens*
- b. *Modus Tollens*
- c. *Silogismo Hipotético*
- d. Falácia da afirmação do consequente: $(p \rightarrow q), q \vdash p$
- e. Falácia da negação do antecedente: $(p \rightarrow q), \neg p \vdash \neg q$

3.6 Formas de Proposição

3.6.1 Tautologia

“Cabral descobriu o Brasil” (c)

“Cabral descobriu o Brasil ou Cabral não descobriu o Brasil” ($c \vee \neg c$)

c é uma verdade histórica, porém podem haver outras declarações c que não são verdadeiras como:

“Cabral descobriu a América” (c)

Entretanto a proposição ($c \vee \neg c$) é sempre verdadeira, independentemente do valor-verdade de c .

3.6.2 Contradição

“Cabral descobriu a América” (c)

“Cabral descobriu a América e não descobriu a América” ($c \wedge \neg c$)

c é uma inverdade histórica, entretanto ($c \wedge \neg c$) é sempre falsa.

3.6.3 Contingências

Não são nem tautologias e nem contradições como por exemplo: p , $\neg p$, $(p \vee q)$, $(p \wedge q)$, $(p \rightarrow q)$, \dots

Os valores verdade não são determinados formalmente; eles dependem (ou são contingentes) de cada caso.

Formas logicamente equivalentes: provar que a forma de duas proposições são logicamente equivalentes é provar usando a tabela-verdade da dupla implicação (\leftrightarrow).

Exemplo: princípio da dupla negação: ($p \leftrightarrow \neg \neg p$)

3.7 Teoremas de De Morgan

1. a negação da conjunção de duas proposições é logicamente equivalente à disjunção das suas negações.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

2. a negação da disjunção de duas proposições é logicamente equivalente à conjunção das suas negações

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

3.8 Exercícios

1. o argumento $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ é uma tautologia?
2. prove a equivalência $\neg(p \wedge \neg r) \leftrightarrow (\neg p \vee r)$ sem usar tabela-verdade (use apenas as equivalências acima).
3. prove usando a tabela-verdade que: $(p \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge \neg r) \leftrightarrow (\neg p \vee r))$
4. teste a equivalência entre:

- (a) $(\neg p \wedge \neg q)$ e $\neg(p \wedge q)$
- (b) $(\neg p \vee \neg q)$ a $\neg(p \vee q)$

5. contrua as tabelas-verdade dos argumentos e verifique se são válidos:

- (a) $(p \rightarrow q), (p \rightarrow \neg q) \vdash \neg p$
- (b) $(p \rightarrow q) \vdash \neg(q \rightarrow p)$
- (c) $(p \vee q), (q \vee r) \vdash (p \vee r)$
- (d) $p, \neg p \vdash q$

3.9 Árvores de Refutação

3.9.1 Introdução

As tabelas-verdade fornecem um teste rigoroso e completo da validade ou invalidade de proposições e de formas de argumento na Lógica. A **vantagem** é que este é um algoritmo decidível (fornece uma resposta em um número finito de operações) e pode, portanto, ser executado em um computador. Mas a **desvantagem** é que a tabela envolve um algoritmo trabalhoso, especialmente se há muitas variáveis (a complexidade é 2^n , onde n é o número de variáveis).

Uma alternativa são as **árvores de refutação** que envolve uma busca exaustiva ou caminhos que tornem as fórmulas verdadeiras.

A **implementação** baseia-se em, dado um argumento, construir uma lista com as premissas e a *negação da conclusão*. Após, desmembra-se as fórmulas da lista acrescentando-as ao fim da lista. O teste de validade é feito da seguinte maneira: se for encontrada uma atribuição de verdade e falsidade (valor-verdade) para as fórmulas que torne verdadeiras todas as fórmulas da lista, então, sob essa atribuição, as premissas do argumento são verdadeiras, enquanto que a conclusão é falsa. Portanto, o argumento é inválido. Se, na busca não surgir nenhuma atribuição de verdade e falsidade para as fórmulas da lista que torne as torne todas verdadeiras, então a refutação falha e o argumento é válido.

Exemplo 1: mostrar que o argumento $(p \wedge q) \vdash \neg\neg p$ é válido

Na lista inicial coloca-se:

1. $(p \wedge q)$ [prem]
2. $\neg\neg p$ [conclusão negada]

Após, desmembram-se as fórmulas acima segundo as regras apresentadas na Seção

3.9.3.

3. p
4. q
5. $\neg q$

X

Para que a premissa $(p \wedge q)$ seja verdadeira, p e q devem ser verdadeiras. Assim, acrescenta-se as duas fórmulas à lista, ou seja p (na linha 3) e depois q (linha 4). Posteriormente, elimina-se a fórmula original $(p \wedge q)$ da lista (neste caso, a fórmula 1). A fórmula 2 pode ser eliminada após se introduzir uma quinta fórmula na lista: $\neg p$. No ramo da árvore que contém as fórmula ainda não eliminadas encontramos p (linha 3) e $\neg p$, o que

mostra que o argumento é inválido pois não há nenhuma atribuição de valores-verdade que satisfaça ambas as fórmulas.

Em resumo, o método baseado em Árvores de Refutação para determinar validade de um argumento faz uma análise de uma lista de proposições na qual procura-se desmembrar estas em letras sentenciais (wff's simples). Todas as proposições que contém operadores lógicos pertencem a uma das categorias: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\neg, \neg\wedge, \neg\vee, \neg\rightarrow, \neg\leftrightarrow$.

3.9.2 Exercício

Construir a árvore de refutação para mostrar que o argumento seguinte é válido:

$(p \vee q), \neg p \vdash q$

3.9.3 Regras para Expandir a Árvore de Refutação

1. \neg : se um ramo contém uma proposição e sua negação, é um ramo fechado
2. $\neg\neg$: se um ramo contém uma proposição da forma $\neg\neg\phi$, substitui-se esta por ϕ
3. \wedge : substituir $(\phi \wedge \psi)$ por ϕ e ψ em linhas separadas
4. \vee : substituir $(\phi \vee \psi)$ por dois ramos: um com ϕ e outro com ψ
5. \rightarrow : se um ramo contém uma proposição da forma $(\phi \rightarrow \psi)$, substituir por $(\neg\phi \vee \psi)$
6. \leftrightarrow : se um ramo contém uma proposição da forma $(\phi \leftrightarrow \psi)$, substituir por $((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi))$
7. $\neg\wedge$: se um ramo contém uma proposição da forma $(\phi \wedge \psi)$, substituir por $(\neg\phi \vee \neg\psi)$
8. $\neg\vee$: se um ramo contém uma proposição da forma $(\neg\phi \vee \psi)$, substituir por $(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
9. $\neg\rightarrow$: se um ramo contém uma proposição da forma $\neg(\phi \rightarrow \psi)$, substituir por $(\phi \wedge \neg\psi)$
10. $\neg\leftrightarrow$: se um ramo contém uma proposição da forma $\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$, substituir por $((\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi))$

3.9.4 Árvore de Refutação e Tautologia

Além de testar a validade de um argumento, as árvores de refutação testam a consistência de uma lista de proposições, ou seja, se todas são verdadeiras simultaneamente. Isto ocorre se e somente se todas as árvores contém ao menos um ramo aberto. Se todos os ramos forem fechados, as proposições são inconsistentes.

Se a lista somente contém uma proposição e se a árvore não tem ramos abertos, então a proposição é dita inconsistente funcional veritativa; se ela contém algum ramo aberto, então, ou é uma tautologia, ou é dita consistente funcional veritativa. ϕ é uma tautologia se e somente se sua negação é inconsistente funcional veritativa, ou seja, se todos os ramos se fecham quando construímos a árvore a partir da negação de ϕ .

Capítulo 4

Lógica de Predicados - Sintaxe

4.1 Introdução e Conceitos Básicos

Na lógica proposicional, já foram vistas proposições simples como “Sócrates é humano”. Porém, o argumento seguinte não pode ser representado na lógica proposicional sem se explorar o significado da palavra “todo” (ou seja, a estrutura interna da proposição):

Todos humanos são mortais. (A)

Sócrates é humano. (B)

∴ Sócrates é mortal. (C)

Na proposição B, “Sócrates” é o sujeito e “humano” é o predicado.

A representação usualmente utilizada na lógica de predicados envolve letras maiúsculas para predicados e letras minúsculas para sujeito.

Logo, “Sócrates é humano” pode ser representado por Hs e “Sócrates é mortal” por Ms .

Se representarmos o argumento anterior por:

Todo H é M .

Sócrates é H .

∴ Sócrates é M .

Aqui H e M não são proposições (ou fórmulas) mas sim classes de atributos ou predicados (como “mortal”, “humano”, etc.). Qualquer substituição de uma classe de atributos por essas letras produz um argumento válido.

Na lógica de predicados, os quantificadores expressam relações entre conjuntos designados pelas classes de atributos. Os exemplos mais comuns de quantificadores na lógica são:

- todo
- algum
- nenhum

Exemplos:

Todo A é B . (*o conjunto A é subconjunto de B*)

Algum A é B . (*pelo menos 1 elemento de A pertence a B*)

Nenhum A é B . (*A e B são disjuntos*)

4.2 Enunciados Categóricos (E.C.)

É um argumento caracterizado por um quantificador seguido de uma classe de atributos, um elo (por exemplo, um verbo) e outra classe de atributos como por exemplo: “Todo H é M”.

4.2.1 Formas de E.C.

Estudaremos algumas formas particulares de enunciados categóricos:

Forma	Designação
Todo S é P.	A
Nenhum S é P.	E
Algum S é P.	I
Algum S não é P.	O

Note que a expressão “não” tem significados diversos neste contexto:

- a. Negação funcional - veritativa (como visto na lógica proposicional): expressa a negação de toda sentença como por exemplo:

Não é o caso que todo S é P.

- b. Complementação: quando aplicado a uma classe de atributos expressa a negação da classe em questão (apenas) como por exemplo:

Algum S não é P.

Algumas árvores são não-carvalhos. [\equiv nova classe (os não-carvalhos)]

Note que isso não é o mesmo que “Não é o caso que algumas árvores são carvalhos”.

4.2.2 Exercício

1. Qual o tipo de E.C. representado pela frase: “Todos invertebrados são não-mamíferos”?

4.2.3 Relação entre formas de Enunciados Categóricos

Um E.C. da forma *A* e um da forma *O* (com os mesmos termos sujeito e predicado) são contraditórios, ou seja, cada um implica a negação do outro, enquanto que a negação de cada um implica o outro. O mesmo vale para as formas *E* e *I*.

Duas formas de enunciados categóricos se dizem conversas se uma delas resulta da outra quando permutamos os termos sujeito e predicado.

Exemplo:

Algum P é S

é a conversa de

Algum S é P.

Atenção: uma conversão é uma inferência válida apenas para as formas *E* e *I*, sendo inválida para as formas *A* e *O*.

Duas formas de enunciados categóricos se dizem contrapostas se uma delas resulta da substituição dos termos sujeito e predicado pelos complementos dos termos predicado e sujeito (respectivamente) da outra. Contraposições da forma *A* são válidas, bem como da forma *O*. Exemplos: Todo animal respira.

Todo homem é um ser pensante.

Todo ser não pensante é um não homem (ou não é um homem).

Todo morcego é mamífero.

Todo não mamífero é não morcego.

Algum anfíbio é não sapo.

Algum não sapo é não não-mamífero.

Alguns esportistas não são brasileiros.

Alguns não brasileiros não são não esportistas.

Contraposições das formas *E* e *I* não são válidas. Exemplos:

Nenhum sapo é réptil.

Nenhum não réptil é não sapo (ou não é sapo).

Algum homem é brasileiro.

Algum não brasileiro é não homem.

4.2.4 Silogismo Categórico

Silogismos Categóricos (S.C.) são argumentos com 2 premissas e uma conclusão (todas Enunciados Categóricos). No argumento devem aparecer exatamente 3 classes distintas de atributos: o termo sujeito (ou menor), o termo predicado (ou maior) e o termo médio.

O termo médio deve ocorrer nas 2 premissas enquanto que os termos sujeito e predicado devem ocorrer cada um em uma premissa.

Exemplo:

Algum A é B.

Todos B são C.

∴ Alguns A são C.

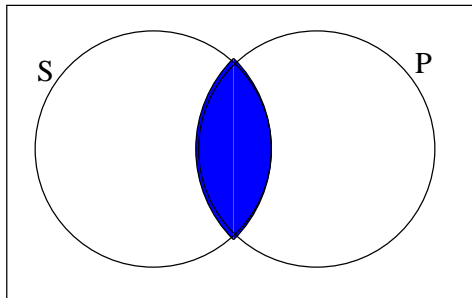
Aluns quadrúpedes são bois.

Todos bois são herbívoros.

∴ Alguns quadrúpedes são herbívoros.

4.3 Diagramas de Venn

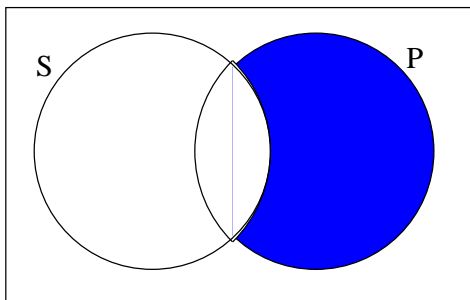
Nos diagramas de Venn, um enunciado é representado por 2 círculos (1 para cada classe de atributos) que se interceptam, como na figura abaixo:



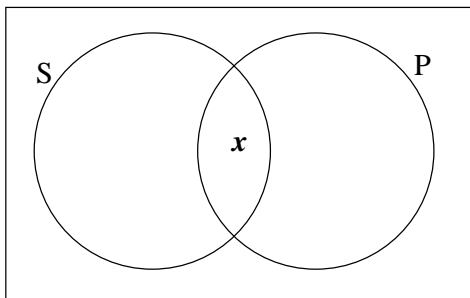
Este diagrama representa a forma de enunciado categórico “Nenhum S é P”. A região interna representa o conteúdo e a externa, o complemento. Na sua forma padrão, para representar a parte que não tem elementos, hachuramos esta. Sobre a região em branco, não se pode inferir nada.

Os diagramas de Venn para as demais formas de enunciado categórico são:

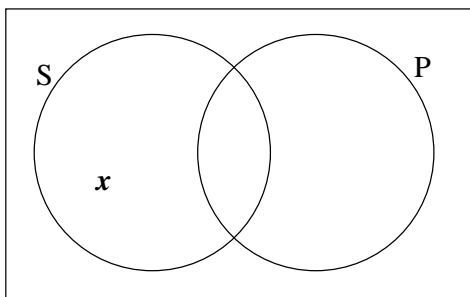
- forma “Todo S é P” (A):



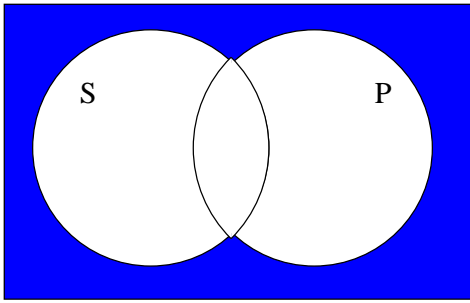
- forma “Algum S é P” (I):



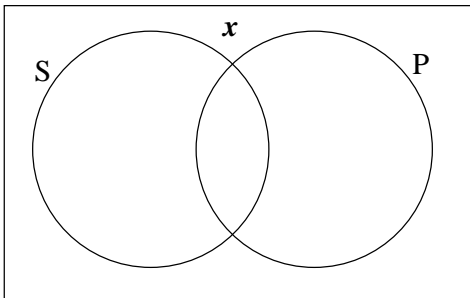
- forma “Algum S não é P” (O):



- forma “Todo não-S é P”:



- forma “Algum não-S é não-P”



4.3.1 Exercícios

1. Faça diagramas de Venn para as seguintes formas:
 - a. Nenhum não-S é P.
 - b. \neg (Todo S é P).
 - c. \neg (Algum S não é P).
 - d. \neg (Todo S é não-P).
2. Utilize diagramas de Venn para mostrar que:
 - a. A conversão da forma E é válida;
 - b. A conversão da forma A é inválida.

4.3.2 Validade do Silogismo Categórico através de Diagramas de Venn

Validade de um argumento através dos Diagramas de Venn.

Exemplo:

\neg (Todo S é P) e 'Algum S não é P' são logicamente equivalentes, bem como 'Todo S é P' e \neg (Algum S não é P).

Tudo que ele fala é tolice.

Toda tolice é desprezível.

Logo, tudo o que ele fala é desprezível.

Abreviando:

Todo F é T.

Todo T é D.

Logo, todo F é D.

Para verificar a validade (ou invalidade):

- construir os Diagramas de Venn de ambas as premissas do Silogismo Categórico;
- verificar se a conclusão do S.C. está representada no D.V.

4.4 Elementos da Linguagem: Quantificadores e Variáveis

Considere o E.C da forma *A*:

Todo S é P (1)

Usando uma notação convencionada (como por exemplo letras maiúsculas para predicados e minúsculas para variáveis ou sujeitos) podemos expressar o E.C. da seguinte forma:

Qualquer que seja x , se x é S , então x é P .

Exemplo: Dado um indivíduo, se ele é humano, então ele é mortal. (2)

Adotaremos o símbolo ' \forall ' para indicar 'para todo', 'qualquer que seja'. Este símbolo é chamado na lógica de *Quantificador Universal* (Q.U.).

$\forall_x(S_x \rightarrow P_x)$ é a formalização de (1)

$\forall_x(H_x \rightarrow M_x)$ é a formalização de (2)

Considere o enunciado da forma *E*:

Nenhum S é P (3)

Este enunciado pode ser escrito como: qualquer que seja x , se x é S , então x não é P . Representação de (3) na lógica de predicados usando o quantificador universal:

$\forall_x(S_x \rightarrow \neg P_x)$

Considere o enunciado da forma *I*:

Algum S é P (4)

Ou, por exemplo, 'há pelo menos um indivíduo que é humano e é mortal'. (5)

Para expressar E.C.'s da forma *I*, é conveniente introduzir o Quantificador Existencial (Q.E.). Assim, a representação de (4) fica: 'existe um x que é S e é P ', ou formalmente:

$\exists_x(S_x \& P_x)$

Por fim, para enunciados da forma *O* como:

Algum S não é P

A interpretação é: existe pelo menos um x que é S e não é P . Formalmente:

$\exists_x(S_x \& \neg P_x)$

4.5 Elementos da Linguagem: Predicados e Nomes

Todo mundo é ladrão: $\forall_x L_x$

João é ladrão: L_x

Alguns predicados podem ser combinados com mais de 1 nome como por exemplo:

João ama Maria.

A_{jm}

Outros exemplos:

Maria é mecânica e enfermeira: $M_m \& E_m$

Se Maria é mecânica, então não é enfermeira: $M_m \rightarrow \neg E_m$

Maria ama João: A_{mj}

João ama a si próprio: A_{jj}

João ama qualquer pessoa: $\forall_x A_{jx}$

Qualquer pessoa ama João: $\forall_x A_{xj}$

Qualquer pessoa ama a si mesma: $\forall_x A_{xx}$

Existe alguém que Maria não ama: $\exists_x \neg A_{mx}$

Existe alguém que tanto Maria quanto João amam: $\exists (A_{mx} \& A_{jx})$

Existe alguém que João ama e alguém que Maria ama: $\exists_x A_{jx} \& \exists_y A_{mx}$

Todo mundo ama todo mundo: $\forall_x \forall_y A_{xy}$

Todo mundo é amado por alguém (não necessariamente a mesma pessoa): $\forall_y \exists_x A_{xy}$

Ninguém ama ninguém: $\forall_x \forall_y \neg A_{xy}$

Se João ama a si próprio, então ele ama alguém: $(A_{jj} \rightarrow \exists_x A_{jx})$

Se João não ama a si próprio, então ele não ama ninguém: $(\neg A_{jj} \rightarrow \forall_x \neg A_{jx})$

Alguém não ama ninguém: $\exists_x \forall_y \neg A_{xy}$

4.6 Regras de Formação da Linguagem

4.6.1 Símbolos Lógicos

- operadores: $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- quantificadores: \forall, \exists
- parênteses

4.6.2 Símbolos não Lógicos

- letras nominais: minúsculas de a até t
- variáveis: minúsculas de u até z
- letras predicativas: maiúsculas

4.6.3 Fórmula

Qualquer seqüência finita de elementos do vocabulário acima. Uma fórmula atômica é uma letra predicativa seguida por zero ou mais letras nominais e/ou variáveis.

4.6.4 Fórmulas Bem Formadas (wff)

Regras de formação de wff's:

- i) Toda fórmula atômica é um wff;
- ii) Se ϕ é uma wff, então $\neg\phi$ é uma wff;
- iii) Se ϕ e ψ são wff's, então $(\phi \ \& \ \psi)$, $(\phi \ \vee \ \psi)$, $(\phi \ \rightarrow \ \psi)$ e $(\phi \ \leftrightarrow \ \psi)$ também são wff's;
- iv) Se ϕ é uma wff contendo uma letra nominal α , então qualquer fórmula da forma $\forall_\beta \phi^{\beta/\alpha}$ ou $\exists_\beta \phi^{\beta/\alpha}$ é um wff. ($\phi^{\beta/\alpha}$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α por β em ϕ);

Exemplo: $\forall_x (F_x \ \& \ G_{xb})$ é um wff, pois:

F_a é uma wff (i);

G_{ab} é uma wff (ii);

$(F_a \ \& \ G_{ab})$ é uma wff (iii);

$\forall_x (F_x \ \& \ G_{xb})$ é uma wff (regra iv com substituição de a por x);

4.7 Prova de Validade no Cálculo de Predicados

As regras do cálculo proposicional já vistas continuam válidas (tanto as básicas quanto as derivadas). Entretanto, para construir uma prova formal de validade para os argumentos quantificados, nós devemos aumentar aquela lista de regras com 4 novas regras básicas.

4.7.1 Regra de Eliminação do quantificador universal ou regra de instanciação universal (Símbolo: EU)

De uma wff $\forall_\beta \phi$, podemos inferir $\phi_{\alpha/\beta}$ (na fórmula ϕ , substituir β por α), a qual resulta da substituição de cada ocorrência da variável β pela letra nominal α em ϕ . Em outras palavras, como uma proposição quantificada ϕ é verdadeira se e somente se todas suas instâncias de substituição forem verdadeiras, podemos substituir a proposição quantificada por qualquer uma de suas instâncias de substituição.

Exemplo: $\forall_x \phi_x \vdash \phi_a$

Pode-se ainda inferir $\phi_b, \phi_c, \phi_d, \dots$

Outro exemplo:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é homem.

\therefore Sócrates é mortal.

cuja representação é:

$\forall_x (H_x \rightarrow M_x)$

H_s

$\therefore M_s$

Fazendo a prova: $\forall x (H_x \rightarrow M_x), H_s \vdash M_s$

1. $\forall x (M_x \rightarrow M_x)$ [prem]
2. H_s [prem]
3. $H_s \rightarrow M_s$ [1, EU]
4. M_s [2,3, MP]

4.7.2 Exercícios

1. Prove a validade de

- a. $\forall x (F_x \rightarrow G_x), \forall x F_x \vdash G_a$
- b. $\neg F_a \vdash \neg \forall x F_x$
- c. $\forall x \forall y f_{xy} \vdash F_{aa}$
- d. $\forall x (A_x \rightarrow Bx), \neg B_t \vdash \neg A_t$
- e. $\forall x (P_x \rightarrow C_x), \forall x (C_x \rightarrow V_x) \vdash \forall x (P_x \rightarrow V_x)$

4.7.3 Regra da Introdução do Quantificador Universal ou Generalização Universal (Símbolo: IU)

Para um wff ϕ contendo uma letra nominal α que:

- i) não ocorra em qualquer uma das premissas;
- ii) não ocorra em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre.

Podemos inferir uma wff da forma $\forall \beta \phi_{\beta/\alpha}$, onde $\phi_{\beta/\alpha}$ é o resultado de se substituir todas as ocorrências de letra nominal α por uma variável β que já não ocorra em ϕ .

Exemplo 1: $\phi_a \vdash \forall x \phi_x$ (onde 'a' é uma letra nominal arbitrária que já não ocorra em ϕ).

Exemplo 2:

Nenhum mortal é perfeito.

Todos os humanos são mortais.

\therefore Nenhum humano é perfeito.

$\forall x (M_x \rightarrow \neg P_x)$

$\forall x (H_x \rightarrow M_x)$

$\therefore \forall x (H_x \rightarrow \neg P_x)$

1. $\forall x (M_x \rightarrow \neg P_x)$ [prem]

2. $\forall x (H_x \rightarrow M_x)$ [prem]

3. $M_a \rightarrow \neg P_a$ [1, EU]

4. $H_a \rightarrow M_a$ [2, EU]

5. $H_a \rightarrow \sim P_a$ [3, 4, SH]

6. $\forall x (H_x \rightarrow \sim P_x)$ [5, IU]

Observações:

- a. a letra nominal α não pode ocorrer em qualquer premissa.

Exemplo:

1. P_a
 2. $\forall_x P_x \quad \leftarrow$ incorreto
- da premissa ‘João é mortal’, seguiria que todos são mortais.

- b. a letra α não deve ocorrer em uma hipótese vigente;

Exemplo:

1. $\forall_x (P_x \rightarrow C_x)$
2. $P_a \rightarrow C_a$
3. $P_a \quad [\text{hip}]$
4. $C_a \quad [2, 3, \text{MP}]$
5. $\forall_x C_x \quad \leftarrow$ incorreto

- c. $\phi_{\alpha/\beta}$ é o resultado se se substituir todas as ocorrências de α por β .

Exemplo:

1. $\forall_x L_{xx}$
2. L_{aa}
3. $\forall_x L_{ax} \quad \leftarrow$ incorreto

4.7.4 Exercício

1. Provar a validade de $\forall_x (F_x \wedge G_x) \vdash \forall_x F_x \wedge \forall_x G_x$

4.7.5 Regra da Introdução do Quantificador Existencial ou Generalização Existencial (Símbolo: IE)

Uma vez que uma proposição quantificada existencialmente, é verdadeira se e somente se aquela proposição tem ao menos uma instância verdadeira, podemos introduzir a regra de inferência.

Se algum indivíduo de uma classe tem uma certa propriedade, então existe pelo menos um indivíduo que tem tal propriedade. Formalmente: de uma wff da forma $\exists_\beta \phi_{\alpha/\beta}$, onde $\phi_{\alpha/\beta}$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β que já não ocorra em ϕ .

Exemplo: $\phi_a \vdash \exists_x \phi_x$

Sócrates é humano.

Logo, ao menos um indivíduo é humano.

1. $H_s \quad [\text{prem}]$
2. $\exists_x H_x \quad [1, \text{IE}]$

Observação: contrariamente à regra IU, em IE α pode ocorrer em qualquer premissa, ou em alguma hipótese ainda não descartada. Ainda, β não precisa substituir todas as ocorrências de α em ϕ . Se α , o indivíduo sobre o qual se afirma ter certa propriedade ϕ não existir, então a inferência via regra IE não é válida.

Assim, os seguintes usos de IE são corretos:

1. $H_s \ \& \ M_s$
2. $\exists_x (H_x \wedge M_x) \quad [1, \text{IE}]$

ou

2. $\exists_x(H_s \wedge M_x)$ [1, IE]

ou

2. $\exists_x(H_x \wedge M_s)$ [1, IE]

Já este uso não está correto:

1. $H_s \rightarrow M_s$ [prem]

2. $\exists_x(H_x \& M_s)$ [1, IE]

pois o quantificador deve valer para todo o escopo da proposição.

O atual rei do Brasil possui um avião.

Logo, existe um indivíduo que possui um avião.

A inferência é incorreta pois baseia-se em um indivíduo (o rei do Brasil) inexistente.

Exemplo: $\forall_x(F_x \vee G_x) \vdash \exists_x(F_x \vee G_x)$

1. $\forall_x(F_x \vee G_x)$ [prem]

2. $F_a \vee G_a$ [1, EU]

3. $\exists_x(F_x \vee G_x)$ [2, IE]

4.7.6 Exercício

1. Prove a validade de $\neg\exists_x F_x \vdash \forall_x F_x$

4.7.7 Regra da Eliminação do Quantificador Existencial ou da Instanciação Existencial (Símbolo: EE)

Método da introdução de uma hipótese

Formalmente: dada uma wff $\exists_\beta \phi$ e uma derivação de alguma conclusão ϕ a partir de uma hipótese $\phi_{\alpha/\beta}$ (onde $\phi_{\alpha/\beta}$ é o resultado de se substituir a variável β pela letra nominal α em ϕ), podemos descartar a hipótese $\phi_{\alpha/\beta}$ e reafirmar ψ .

Restrição: α não pode ocorrer em ψ , nem em qualquer premissa e nem em qualquer hipótese ainda não descartada. Este método trata a regra EE como hipotética. Ela afirma que pela menos uma coisa tem uma propriedade que faz parte da premissa existencial.

Exemplo:

$\exists_x(F_x \& G_x) \vdash \exists_x F_x$

1. $\exists_x(F_x \& G_x)$ \rightarrow **premissa existencial**

2. $F_a \& G_a$ [hip. por EE]

3. F_a [2, E&]

4. $\exists_x F_x$ [3, IE]

5. $\exists_x F_x$ [1, 2-1, EE]

A premissa existencial afirma que existe pelo menos um indivíduo que tem a propriedade de ser F e G (ao mesmo tempo). Na hipótese, supomos que esse indivíduo é 'a'. Uma vez que conseguimos derivar uma conclusão a partir da hipótese, a regra EE permite descartar esta e concluir aquele.

Atenção:

i) a letra nominal α não pode ocorrer em ϕ .

Exemplo:

1. $\forall_x \exists_y P_{yx}$ [prem]

2. $\exists_y P_{ya}$ [1, EU]

3. P_{aa} [hip. por EE]
4. $\exists_x P_{xx}$ [3, IE]
5. $\exists_x P_{xx}$ [1, 3-4, EE] \longrightarrow incorreto, pois ‘a’ aparece na hipótese.

Interpretação: de ‘todos tem um pai’ ($\forall_x \exists_y P_{xy}$) não segue que ‘alguém é pai de si mesmo’.

- ii) a letra nominal α não deve ocorrer em ψ (a conclusão iniciada com a hipótese).

Exemplo:

1. $\exists_x B_{xx}$ [prem. existencial]
2. B_{aa} [hip. por EE]
3. $\exists_x B_{ax}$ [2, IE]
4. $\exists_x B_{ax}$ [1, 2-3, EE] \longrightarrow incorreto, pois ‘a’ ocorre em ψ (linha 3).

Interpretação: de ‘alguém bateu em si próprio’ ($\exists_x B_{xx}$) não segue que ‘Alice bateu em alguém’ ($\exists_x B_{ax}$).

- iii) a letra nominal α não pode ocorrer em qualquer premissa.

Exemplo:

1. $\exists_x G_x$ [prem. existencial]
2. R_a [prem]
3. G_a [hip. por EE]
4. $(G_a \& R_a)$ [2, 3, &I]
5. $\exists_x (G_x \& R_x)$ [4, IE]
6. $\exists_x (G_x \& R_x)$ [1, 3-5, EE] \longrightarrow incorreto, pois ‘a’ ocorre na premissa.

Interpretação: de ‘algo é uma girafa’ ($\exists_x G_x$) não segue que ‘algo é uma rã e uma girafa’.

- iv) a letra α não pode ocorrer que qualquer hipótese vigente na linha onde EE será aplicada.

Exemplo:

1. $\exists_x G_x$ [prem. existencial]
2. R_a [hip. por PC]
3. G_a [hip. por EE]
4. $R_a \& G_a$ [2, 3, IE]
5. $\exists_x (R_x \& G_x)$ [4, IE]
6. $\exists_x (R_x \& G_x)$ [1, 3-5, EE]
7. $R_a \rightarrow \exists_x (R_x \& G_x)$ [2-6, PC] \longrightarrow incorreto, pois ‘a’ ocorre em uma hipótese ainda não descartada.

Interpretação: de ‘algo é uma girafa’ ($\exists_x G_x$) não segue que: ‘se Alice é uma rã, então existe algo que é rã e girafa’

Exercício

1. Prove a validade de $\forall_x (F_x \rightarrow G_x), \exists_x F_x \vdash \exists_x G_x$

Método Direto

A quantificação existencial de uma proposição garante que existe pelo menos 1 indivíduo cuja substituição da variável β pelo seu nome (através de uma letra nominal) naquela proposição a torna verdadeira.

Exemplo 1:

Todos cães são carnívoros.

Alguns animais são cães.

Logo, alguns animais são carnívoros. $\equiv \exists x(A_x \ \& \ C_x)$

Formalizar:

$D_x \equiv x$ é cão

$C_x \equiv x$ é carnívoro

$A_x \equiv x$ é animal

1. $\forall x(D_x \rightarrow C_x)$
2. $\exists x(A_x \ \& \ D_x)$
3. $A_a \ \& \ D_a$ [2, EE (direto)]
4. $D_a \rightarrow C_a$ [1, EU]
5. D_a [3, \wedge E]
6. C_a [4, 5, MP]
7. A_a [3, E]
8. $A_a \ \& \ C_a$ [6, 7, $\&$ I]
9. $\exists x(A_x \ \& \ C_x)$ [8, IE]

Regra/Dica: se precisar usar EE e EU em uma prova, usar primeiro EE.

Exemplo 2:

Alguns gatos são animais.

Alguns cães são animais.

Logo, alguns gatos são cães. $\equiv \exists x(G_x \ \& \ C_x)$

1. $\exists x(G_x \ \& \ A_x)$
2. $\exists x(C_x \ \& \ A_x)$
3. $G_a \ \& \ A_a$ [1 EE]
4. $C_a \ \& \ A_a$ [2, EE] \longrightarrow incorreto

Uma restrição deve ser imposta ao se utilizar o método direto: a letra nominal α não pode ter ocorrências anteriores naquele contexto. A 2 premissa garante que ‘a’ é cão e animal, mas não podemos afirmar que ‘a’ é o mesmo indivíduo sobre o qual se afirma ser gato e animal.

4.7.8 Exercícios

Prove a validade de:

- a. $\forall x(F_x \rightarrow G_x), \exists x F_x \vdash \exists x G_x$
- b. $\exists x(F_x \ \& \ G_x) \vdash \exists x F_x \vee \exists x G_x$
- c. $\exists x F_x \vee \exists x G_x \vdash \exists x (F_x \vee G_x)$

4.8 Prova de Teoremas

Todos os teoremas do cálculo proposicional são válidos no cálculo de predicados. Prova de alguns teoremas específicos do cálculo de predicados:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash \forall_x (F_x \rightarrow F_x) & \\
 \quad 1. F_a & [\text{hip. por PC}] \\
 \quad 2. F_a \rightarrow F_a & [1, 1, \text{PC}] \\
 \quad 3. \forall_x (F_x \rightarrow F_x) & [2, \text{IU}] \\
 \\
 \vdash \forall_x F_x \rightarrow F_a & \\
 \quad 1. \forall_x F_x & [\text{hip. por PC}] \\
 \quad 2. F_a & [1, \text{EU}] \\
 \quad 3. \forall_x F_x \rightarrow F_a & [1, 2, \text{PC}]
 \end{array}$$

4.9 Exercícios

Prove os seguintes teoremas:

- $\vdash \forall_x F_x \vee \exists_x \neg F_x$
- $\vdash \neg \exists_x \forall_y (L_{xy} \leftrightarrow \neg L_{xx})$
- $\vdash \forall_x (F_x \rightarrow \neg G_x) \leftrightarrow \neg \exists_x (F_x \wedge G_x)$

4.10 Equivalências Quantificacionais

Existem 4 equivalências importantes que expressam relações entre os quantificadores universal e existencial.

- $\vdash \neg \forall_x \neg F_x \leftrightarrow \exists_x F_x$
- $\vdash \neg \forall_x F_x \leftrightarrow \exists_x \neg F_x$
- $\vdash \forall_x \neg F_x \leftrightarrow \neg \exists_x F_x$
- $\vdash \forall_x F_x \leftrightarrow \neg \exists_x \neg F_x$

4.11 Identidade (=)

O cálculo de predicados possui alguns símbolos com propósitos específicos. Um deles é o predicado de identidade (=) que significa “é idêntico a”, “é a mesma coisa que”. Note que “=” poderia ser representado por uma letra predicativa como “I”.

Entretanto, por questão de conveniência de notação (analogia com a matemática), a sintaxe do “=” é tal que este predicado é infixado (escrito entre 2 letras nominais). Assim, I_{ab} pode ser expresso como $a = b$.

Devemos, então, adicionar uma regra extra de formação de wff's:

- o resultado de se escrever o símbolo “=” entre duas letras nominais é uma wff.

Exemplo:

1. Machado de Assis é Fernando Pessoa.
Representação: $m = f$
2. Machado de Assis não é Fernando Pessoa $\neg m = f$
3. Existe Machado de Assis. $\exists_x x = m$
4. Se Machado de Assis é Fernando Pessoa, então Fernando Pessoa ennscreveu Dom Casmurro.
Representação: $(m = f \rightarrow E_{fd})$

4.12 Exercícios

Formalize usando identidade:

- a. Somente Machado de Assis escreveu Dom Casmurro.
- b. Todos os escritores exceto Machado de Assis são mercenários.
- c. Machado de Assis é o melhor escritor brasileiro.
- d. Existe algo.
- e. Existem pelo menos 2 coisas.
- f. Existe, no máximo, 2 coisas.

4.13 Regras de Introdução e Eliminação da Identidade

4.13.1 Introdução da Identidade (=I)

Para qualquer letra nominal α , podemos afirmar $\alpha = \alpha$ em qualquer linha da prova:

Exemplo 1:

$\vdash \forall_x x = x$

1. $a = a$ [=I]

2. $\forall_x x = x$ [1, IU]

Exemplo 2:

$\vdash \exists_x a = x$

1. $a = a$ [=I]

2. $\exists_x x = a$ [1, IE]

4.13.2 Eliminação da Identidade (=E)

Se ϕ é uma wff contendo a letra nominal α , então de ϕ e de $\alpha_1 = \alpha_2$ ou $\alpha_2 = \alpha_1$, podemos inferir ϕ^{α_2/α_1} , onde ϕ^{α_2/α_1} é o resultado de se substituir pelo menos uma ocorrência de α_1 por α_2 em ϕ .

Exemplo 1: prove $F_a, a = b \vdash F_b$

1. F_a

2. $a = b$

3. F_b [1,2, =E]

Exemplo 2: prove $F_a, \neg F_b \vdash \neg a = b$

1. F_a

2. $\neg F_b$

3. $a = b$ [hip. por RAA]

4. F_b [1, 3, =E]

5. $F_b \wedge \neg F_b$ [2, 4, $\wedge I$]

6. $\neg a = b$ [3-5, RAA]

Exemplo 3: prove $\vdash \forall_x \forall_y (x = y \rightarrow y = x)$

1. $a = b$ [hip. por PC]

2. $b = a$ [1, 1, =E]

3. $(a = b \rightarrow b = a)$ [1-2, PC]

4. $\forall_y (a = y \rightarrow y = a)$ [3, IU]

5. $\forall_x \forall_y (x = y \rightarrow y = x)$ [4, IU]

4.14 Exercício

Prove: $\vdash \forall_x \forall_y \forall_z ((x = y \rightarrow y = z) \rightarrow x = z)$

Capítulo 5

Árvores de Refutação

5.1 Introdução

No cálculo de predicados, a validade de um argumento pode ser provada pelos métodos já vistos. A invalidade de argumentos no cálculo de predicados não pode ser determinada de forma geral.

Por que???

Entretanto, para algumas formas particulares de argumentos, a demonstração da validade destas formas é possível de ser feita através do método de Árvores de Refutação. No cálculo de predicados, este método incorpora 6 novas regras.

5.2 Quantificador Universal (\forall)

Formalmente: se uma wff da forma $\forall_\beta \phi$ aparece em um ramo aberto, e se α é uma letra nominal que ocorre em uma wff qualquer deste ramo, então escrevemos $\phi^{\alpha/\beta}$ no final do ramo. Se nenhuma wff contendo qualquer letra nominal aparecer no ramo, então escolhemos uma letra nominal α qualquer e escrevemos $\phi^{\alpha/\beta}$ no final do ramo. Em ambos os casos, não descartamos $\forall_\beta \phi$ da lista.

5.3 Quantificador Universal Negado ($\neg\forall$)

Se uma wff da forma $\neg\forall_\beta \phi$ aparec em um ramo aberto, podemos descartá-la e substituir por $\exists_\beta \neg\phi$ no final de cada ramo aberto.

5.4 Quantificador Existencial Negado ($\neg\exists$)

Se uma wff da forma $\neg\exists_\beta \phi$ aparece em um ramo aberto, podemos descartá-la e escrever $\forall_\beta \phi$ no final da cada ramo aberto.

5.5 Quantificador Existencial (\exists)

Se uma wff não descartada da forma $\exists_\beta \phi$ aparecer em um ramo aberto, podemos descartá-la. Escolhemos então uma letra nominal α qua ainda não aparece no ramo e escrevemos $\phi^{\alpha/\beta}$ (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β pela letra nominal α em ϕ) no final de cada ramo aberto.

5.6 Identidade ($=$)

Se uma wff da forma $\alpha_1 = \alpha_2$ aparecer em um ramo aberto e se uma wff ϕ contendo α_1 ou α_2 aparecer neste ramo, então podemos escrever no final do ramo qualquer wff que ainda não tenha sido usada no ramo e que seja o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências em ϕ de qualquer uma das letras nominais pela outra (isto é, α_1 por α_2 ou vice-versa); não se descarta a linha $\alpha_1 = \alpha_2$.

5.7 Identidade Negada ($\neg =$)

Fecha-se qualquer ramo aberto no qual ocorra um wff da forma $\neg \alpha = \alpha$.

5.8 Exercícios

Construa uma árvore de refutação para verificar se as seguintes formas de argumento são válidas:

- a. $\forall x(F_x \rightarrow G_x), G_x \vdash F_a$
- b. $\exists x(F_x \wedge G_x) \vdash (\exists x F_x \wedge \exists x G_x)$
- c. $\exists x F_x, \exists x G_x \vdash \exists x(F_x \wedge G_x)$
- d. $\neg \exists x(F_x \wedge G_x) \vdash \neg F_a$
- e. $\forall x F_x \rightarrow \forall x G_x, \neg \exists x G_x \vdash \exists x \neg F_x$
- f. $\vdash \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

Bibliografia

- [1] E. de Alencar Filho: *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 1995.
- [2] I. M. Copi: *Symbolic Logic*. New York: MacMillan Pub.
- [3] M. M. do C. Costa: *Introdução à Lógica Modal Aplicada à Computação*. Porto Alegre: Instituto de Informática da UFRGS, 1992.
- [4] E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*. New York: D. Van Nostrand.
- [5] J. Nolt and D. Rohatyn: *Lógica*. São Paulo: Makron Books, 1991.
- [6] R. H. Thomason: *Symbolic Logic: An Introduction*. Toronto: Collier-MacMillan, 1970.