INF01 118

Técnicas Digitais para Computação

Funções Booleanas: Mintermos e Maxtermos

UFRGS

Aula 9

1. Mintermos e Maxtermos - Introdução

- **Definição de uma função booleana através de uma tabela-verdade**

expressão algébrica da função F= soma dos Mintermos para os quais F = 1

- **Mintermo = termo-produto no qual cada variável aparece exatamente 1 vez, complementada (se bit da tabela = 0) ou não (se bit da tabela = 1)**
- **Tabela-verdade de função com n variáveis tem 2^n mintermos**

- **Para 3 variáveis**

X	Y	Z	Termo-produto	mintermo
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m1
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m2
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m3
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m4
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m5
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m6
1	1	1	XYZ	m7

- **Definição de uma função booleana através de uma tabela-verdade**

expressão algébrica da função F= produto dos Maxtermos para os quais F = 0

- **Maxtermo = termo-soma no qual cada variável aparece exatamente 1 vez, complementada (se bit da tabela = 1) ou não (se bit da tabela = 0)**

- **n variáveis => 2^n maxtermos**

$Mj = \overline{mj}$

$M1 = X + Y + \overline{Z}$

$m1 = \overline{M1} = \overline{X} . \overline{Y} . Z$

DeMorgan

X	Y	Z	termo- produto	termo-soma	maxtermo
0	0	0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$X + Y + Z$	M0
0	0	1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$X + Y + \overline{Z}$	M1
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$X + \overline{Y} + Z$	M2
0	1	1	$\overline{X}YZ$	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M3
1	0	0	$X\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{X} + Y + Z$	M4
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M5
1	1	0	$XY\overline{Z}$	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M6
1	1	1	XYZ	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M7

2. Representação de Funções Booleanas por Mintermos e Maxtermos

- Expressão algébrica de função booleana dada por tabela-verdade = soma lógica dos mintermos que produzem 1 na função

- Exemplo

X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ = m0 + m2 + m5 + m7 = \Sigma m\,(0,2,5,7)$$

$\overline{F} = \Sigma m\ (1,3,4,6)$ **(os mintermos que faltam em F)**

$\overline{\overline{F}} = \overline{m1 + m3 + m4 + m6} = \overline{m1} . \overline{m3} . \overline{m4} . \overline{m6} = M1 . M3 . M4 . M6$

- **Portanto**

  $F = \Pi M\ (1,3,4,6)$ produto lógico dos maxtermos que produzem 0 na função

- **Tomando uma função que não é uma soma de mintermos** $E = \overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Z}$

  pode-se obter a forma de soma dos mintermos através da tabela-verdade

X	Y	Z	E
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$E = \Sigma\ m\ (0,1,2,4,5)$$

soma de mintermos
produto de maxtermos → **"formas - padrão" de expressões algébricas (também ditas "formas canônicas")**

- **soma de mintermos contém**
  - **máximo número de termos-produto**
  - **máximo número de literais em cada termo**

3. Soma de Produtos (SDP)

- Uma forma de soma de mintermos pode ser simplificada para uma soma de produtos, reduzindo-se número de termos e de literais.
    - manipulação algébrica
    - outras técnicas
- Soma de produtos (SDP) contém termos com 1 , 2 , . . . , n literais

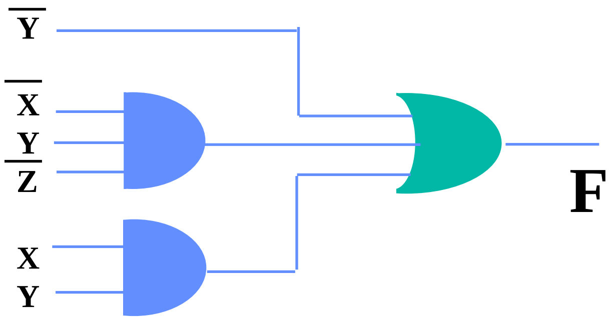
- Exemplo

$$F = \overline{Y} + \overline{X}Y\overline{Z} + XY$$

3 termos

- 1 termo com 1 literal
- 1 termo com 2 literais
- 1 termo com 3 literais

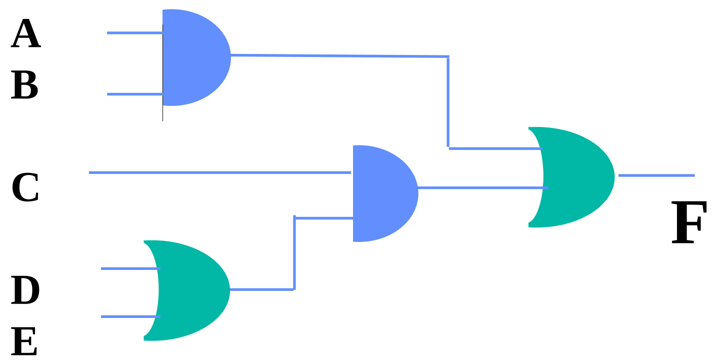
- Circuito Lógico



Circuito tipo AND-OR
esta é uma implementação em 2 níveis

- Tomando uma expressão que não é SDP

$$F = AB + C\,(D + E)$$

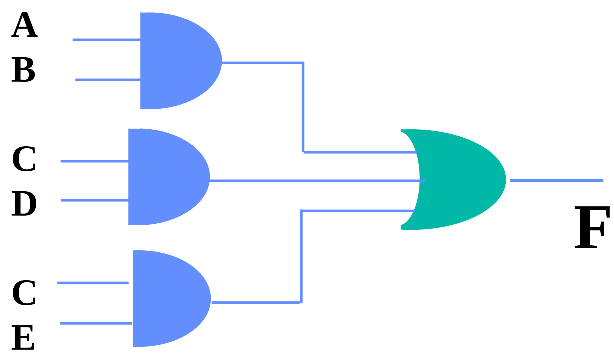


Esta é uma implementação em 3 níveis
4 portas, 8 entradas

tempo de propagação máximo =
3 x tempo de uma porta

- Convertendo para uma SDP

$$F = AB + C\,(D + E)$$
$$= AB + CD + CE$$

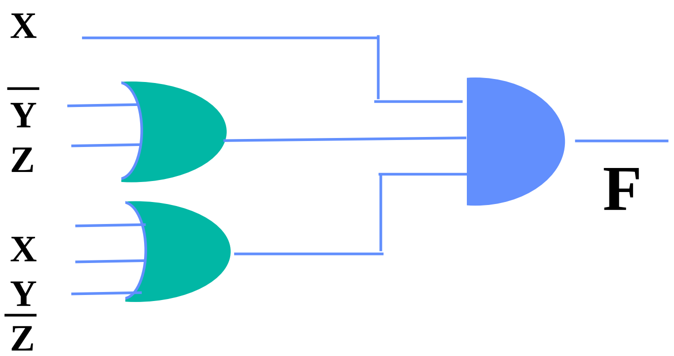


implementação em 2 níveis
4 portas, 9 entradas

tempo de propagação máximo =
2 x tempo de uma porta

4. Produto de Somas

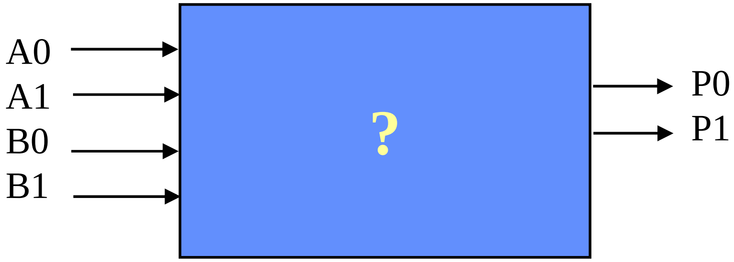
- **Exemplo** $F = X(\overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z})$
- **Circuito Lógico**



Implementação também em 2 níveis circuito tipo OR-AND

Exercício

- Projete um circuito combinacional que realiza a seguinte função:



As saídas valem P1=0 e P0=0, quando a entrada A = entrada B,
P1=1 e P0=0, quando a entrada A é menor que a entrada B e
P1=0 e P0=1, quando a entrada A é maior que a entrada B.

Exercício (continuação)

- Projeto da Tabela Verdade

Entradas				Saídas	
B1	B0	A1	A0	P1	P0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Extração da função Boolena

Opção: Soma de Produtos (mintermos)

Exercício (continuação)

- Projeto da Tabela Verdade

Entradas				Saídas	
B1	B0	A1	A0	P1	P0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

$P1 = \overline{B1}B0\overline{A1}\,\overline{A0} + B1\overline{B0}\,\overline{A1}\,\overline{A0} + B1\overline{B0}\,\overline{A1}A0 + B1B0\overline{A1}\,\overline{A0} + B1B0\overline{A1}A0 + B1B0A1\overline{A0}$

$P0 = \overline{B1}\,\overline{B0}\,\overline{A1}A0 + \overline{B1}\,\overline{B0}A1\overline{A0} + \overline{B1}\,\overline{B0}A1A0 + \overline{B1}B0A1\overline{A0} + \overline{B1}B0A1A0 + B1\overline{B0}A1A0$

Exercício (continuação)

$P1 = \overline{B1}B0\overline{A1}\,\overline{A0} + B1\overline{B0}\,\overline{A1}\,\overline{A0} + B1\overline{B0}\,\overline{A1}A0 +$
$B1B0\overline{A1}\,\overline{A0} + B1B0\overline{A1}A0 + B1B0A1\overline{A0}$

Simplificação pelas regras Booleanas

$P0 = \overline{B1}\,\overline{B0}\,\overline{A1}A0 + \overline{B1}\,\overline{B0}A1\overline{A0} + \overline{B1}\,\overline{B0}A1A0 +$
$\overline{B1}B0A1\overline{A0} + \overline{B1}B0A1A0 + B1\overline{B0}A1A0$

Exercício (continuação)

- Implementação do circuito (2 níveis de lógica)

Exercício (continuação)

- Implementação do circuito na tecnologia CMOS (Teorema de DeMorgan)

Exercício (continuação)

- Implementação do circuito na tecnologia CMOS usando uma única porta complexa