INF01058

Circuitos Digitais

Funções Booleanas

Aula 8

Álgebra Booleana de Chaveamento

Álgebras Booleanas
- variáveis, constantes
- valores de variáveis e constantes: conjunto discreto e finito
- operadores “+”, “.”, “complemento” definidos sobre as constantes
- elementos neutros para cada operador

Álgebra Booleana de Chaveamento
- valores 0 e 1
- operadores “+”, “.”, “complemento” definidos sobre 0 e 1

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

“O” ⟺ “falso”
“1” ⟺ “verdadeiro”

- “0” é o elemento neutro do operador “+”
- “1” é o elemento neutro do operador “.”

“+” ⟺ “or”
“.” ⟺ “and”

Axiomas e Teoremas da Álgebra Booleana de Chaveamento

1. $X + 0 = X$
2. $X \,.\, 1 = X$
3. $X + 1 = 1$
4. $X \,.\, 0 = 0$
5. $X + X = X$
6. $X \,.\, X = X$
7. $X + \overline{X} = 1$
8. $X \,.\, \overline{X} = 0$
9. $\overline{\overline{X}} = X$
10. $X + Y = Y + X$
11. $X\,Y = Y\,X$ — Lei comutativa
12. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
13. $X(YZ) = (XY)Z$ — Lei associativa
14. $X \,.\, (Y + Z) = XY + XZ$
15. $X + YZ = (X + Y)\,(X + Z)$ — Lei distributiva
16. $\overline{X + Y} = \overline{X} \,.\, \overline{Y}$
17. $\overline{X \,.\, Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ — DeMorgan

---

- **Dual de uma expressão algébrica**
  - trocar OR ⟷ AND
  - trocar 0 ⟷ 1

- Em qualquer equação booleana acima, X pode ser substituído por uma expressão qualquer.

- Exemplo: $X + 1 = 1$ substituindo X por AB + C $AB + C + 1 = 1$

- Lei distributiva $X + (Y \,.\, Z) = (X + Y) \,.\, (X + Z)$
- Ex. : $(A + B)\,(A + CD)$

  aplicando lei distributiva ao contrário => $A + BCD$

Avaliação de Funções Booleanas

- **Construção de uma Tabela-Verdade**

  Exemplo: F (A,B)
  4 combinações de valores de A,B
  uma linha para cada combinação

A	B	F(A,B)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

- **Avaliação da função**
  - substituir variáveis por 0 ou 1
  - avaliar AND, OR, complemento na ordem estabelecida

- **Exemplo: DeMorgan** $\overline{X + Y} = \overline{X} \,.\, \overline{Y}$

X	Y	X+Y	$\overline{X+Y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \,.\, \overline{Y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

As 2 tabelas-verdade são idênticas, portanto a igualdade das funções é verdadeira

---

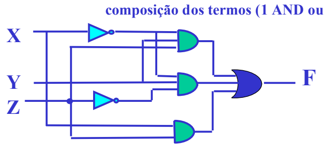
Funções Booleanas e Circuitos Lógicos

$\overline{X} \,.\, Y \,.\, Z + \overline{X} \,.\, Y \,.\, \overline{Z} + X \,.\, Z$

termo

literais
Cada ocorrência de variável (complementada ou não)

- Pode-se obter um circuito da seguinte maneira
  - cada termo é uma porta
  - cada literal é uma entrada para uma porta
  - portas adicionais : inversores na entrada
    composição dos termos (1 AND ou 1 OR)



O número de termos e literais dá uma medida aproximada da complexidade do circuito.

- No exemplo: 3 termos, 8 literais ⟹ 6 portas
  - 3 portas de 3 entradas
  - 1 porta de 2 entradas
  - 2 portas de 1 entrada

Circuitos Digitais

Manipulações Algébricas

- Manipulação algébrica usando axiomas e teoremas => simplificação de circuitos
- Redução do número de termos e/ou de literais deve resultar num circuito com menos portas

- Exemplo anterior

$F = \bar{X}\,Y\,Z + \bar{X}\,Y\,\bar{Z} + X\,Z$

(identidade 14) lei distributiva

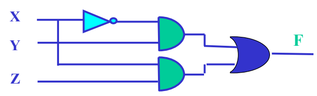
$F = \bar{X}\,Y\,(Z + \bar{Z}) + X\,Z$

(identidade 7) complemento

$F = \bar{X}\,Y\,.\,1 + X\,Z$

(identidade 2) elemento identidade

$F = \bar{X}\,Y + X\,Z$ → 2 termos, 4 literais



4 portas
- 3 portas de 2 entradas
- 1 porta de 1 entrada

Circuitos Digitais

- Não existe nenhuma técnica especial para indicar qual manipulação algébrica deve ser aplicada para simplificar o circuito
  - método de tentativas
  - familiaridade com axiomas e teoremas

- Exemplos

$X + XY = X\,.\,(1+Y) = X\,.\,1 = X$

$XY + X\bar{Y} = X\,.\,(Y+\bar{Y}) = X\,.\,1 = X$

$X + \bar{X}Y = (X+\bar{X})\,.\,(X+Y) = 1.\,(X+Y) = X + Y$

- Outros exemplos

$X\,.\,(X+Y) = X.X + X.Y = X + X.Y = X.(1+Y) = X.1 = X$

$(X+Y)\,.\,(X+\bar{Y}) = X + Y.\,\bar{Y} = X + 0 = X$

$X\,.\,(\bar{X}+Y) = X\,.\,\bar{X} + X.\,Y = 0 + X\,.\,Y = XY$

- Note-se que estas 3 funções são as duais das anteriores

Circuitos Digitais

Teorema do Consenso $XY + \bar{X}Z + YZ = XY + \bar{X}Z$

Demonstração: fazer AND do terceiro termo com $X + \bar{X} = 1$

$$\begin{aligned} XY + \bar{X}Z + YZ &= XY + \bar{X}Z + YZ\,(X + \bar{X}) \\ &= XY + \bar{X}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XY + XYZ + \bar{X}Z + \bar{X}YZ \\ &= XY(1 + Z) + \bar{X}Z(1 + Y) \\ &= XY + \bar{X}Z \end{aligned}$$

Aplicação numa simplificação

$$\begin{aligned} (A + B)\,(\bar{A} + C) &= A\bar{A} + AC + \bar{A}B + BC \\ &= AC + \bar{A}B + BC \\ &= AC + \bar{A}B \end{aligned}$$

redundante segundo o teorema do consenso

Circuitos Digitais

Complemento de uma função

a) Usando tabela-verdade
trocar 0 ⟷ 1

- exemplo: $F = X(\bar{Y}\bar{Z} + YZ)$
- construindo a tabela-verdade

X	Y	Z	$\bar{Y}\bar{Z}$	YZ	$\bar{Y}\bar{Z} + YZ$	F	$\bar{F}$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0

construção da função a partir da tabela-verdade

OR dos termos iguais a 1

$$\bar{F} = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z}$$

Circuitos Digitais

b) Usando DeMorgan

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \overline{X\,(\bar{Y}\bar{Z} + YZ)} \\ &= \bar{X} + (\overline{\bar{Y}\bar{Z} + YZ}) \\ &= \bar{X} + (\overline{\bar{Y}\bar{Z}}\,.\,\overline{YZ}) \\ &= \bar{X} + (Y + Z).(\bar{Y} + \bar{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{X} + Y\bar{Y} + Y\bar{Z} + \bar{Y}Z + Z\bar{Z} \\ &= \bar{X} + Y\bar{Z} + \bar{Y}Z \end{aligned}$$

c) Tomar dual da função e complementar cada literal

$F = X(\bar{Y}.\bar{Z} + Y.Z)$

$F' = X + (\bar{Y} + \bar{Z})\,(Y + Z)$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{X} + (Y + Z).(\bar{Y} + \bar{Z}) \\ &= \bar{X} + Y\bar{Y} + Y\bar{Z} + \bar{Y}Z + Z\bar{Z} \\ &= \bar{X} + Y\bar{Z} + \bar{Y}Z \end{aligned}$$

X	Y	Z	$\bar{X}$	$Y\bar{Z}$	$\bar{Y}Z$	$\bar{F}$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

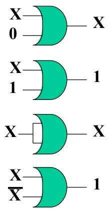
Circuitos Digitais

Axiomas e Teoremas da Álgebra Booleana de Chaveamento

1. $X + 0 = X$
2. $X\,.\,1 = X$
3. $X + 1 = 1$
4. $X\,.\,0 = 0$
5. $X + X = X$
6. $X\,.\,X = X$
7. $X + \bar{X} = 1$
8. $X\,.\,\bar{X} = 0$
9. $\bar{\bar{X}} = X$
10. $X + Y = Y + X$
11. $X\,Y = Y\,X$ — Lei comutativa
12. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
13. $X(YZ) = (XY)Z$ — Lei associativa
14. $X\,.\,(Y + Z) = XY + XZ$
15. $X + YZ = (X + Y)\,(X+Z)$ — Lei distributiva
16. $\overline{X + Y} = \bar{X}\,.\,\bar{Y}$
17. $\overline{X\,.\,Y} = \bar{X} + \bar{Y}$ — DeMorgan

Porta OR :

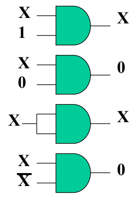
1. $X + 0 = X$
3. $X + 1 = 1$
5. $X + X = X$
7. $X + \overline{X} = 1$



E1	E2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Porta AND :

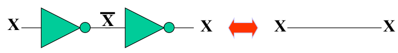
2. $X \,.\, 1 = X$
4. $X \,.\, 0 = 0$
6. $X \,.\, X = X$
8. $X \,.\, \overline{X} = 0$



E1	E2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

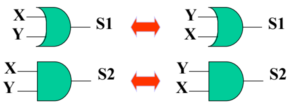
Porta NOT :

9. $\overline{\overline{X}} = X$

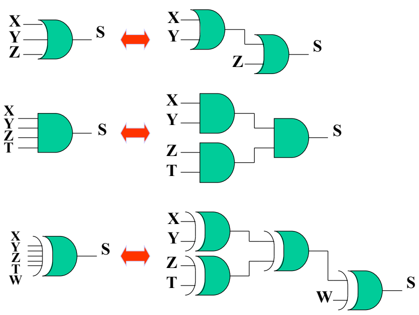


Lei Comutativa :

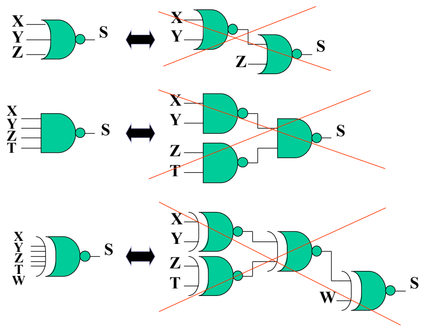
10. $X + Y = Y + X$
11. $X\,Y = Y\,X$



Expansão de Portas com Múltiplas Entradas :

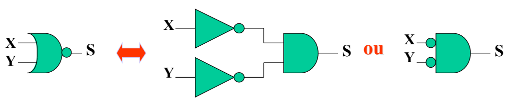


CUIDADO !!!

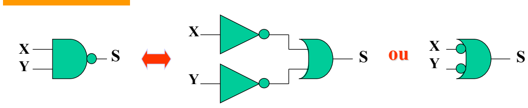


Teorema de DeMorgan :

16. $\overline{X + Y} = \overline{X} \,.\, \overline{Y}$



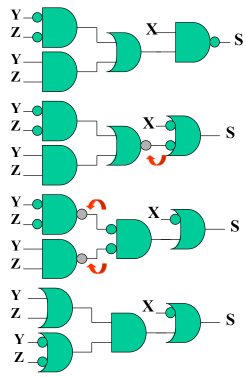
17. $\overline{X \,.\, Y} = \overline{X} + \overline{Y}$



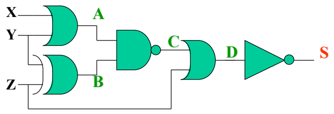
Usando o Teorema de DeMorgan ...

$$\overline{S} = \overline{X\,(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)}$$
$$= \overline{X} + \overline{(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)}$$
$$= \overline{X} + (\overline{\overline{Y}\,\overline{Z}} \,.\, \overline{YZ})$$
$$= \overline{X} + (\,Y + Z).(\,\overline{Y} + \overline{Z})$$

Dica: sempre que possível e interessante a aplicação do Teorema de DeMorgan, troca-se a porta lógica de AND para OR, e vice-versa, invertendo-se os sinais de entrada e saída.



Combinação de Portas Lógicas



X	Y	Z	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Formas de Onda (transição no tempo) :