



FLUXOS EM REDES: VARIANTES E ALGORITMOS

Marcus Ritt

INF 5016/CMP 588 – Algoritmos avançados — Ago 2021 1

1. Introdução
2. Variantes do problema
3. Algoritmos

$$f_a, a \in A \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_{|A|})$$

- Ford-Fulkerson:

→ 1. $f = 0$ ← Fluxo inicial ??

2. Encontra um caminho $s - t$ no grafo residual G_f

3. Aumenta o fluxo no caminho.

4. Repete até não tem caminho $s - t$ em G_f .

$$\bar{C} = nC$$

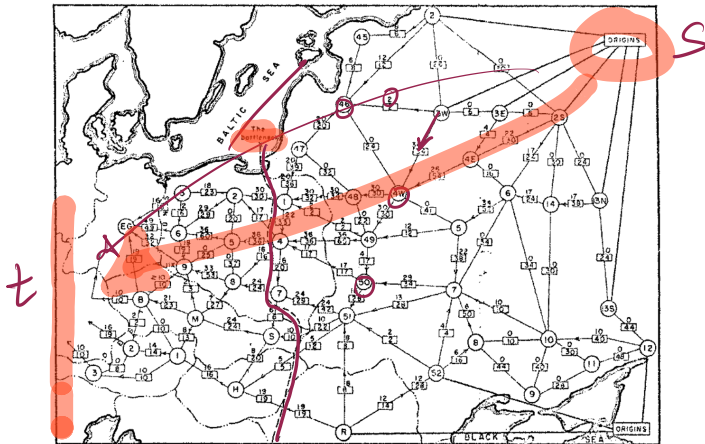
- Seleção do caminho:

1. Arbitrário:

- complexidade $O(mnC)$ com $C = \|c\|_\infty$ com $c \in \mathbb{Q}^m$ N
- não necessariamente termina com $c \in \mathbb{R}^m$.

2. Busca em profundidade (Dean et al. 2006)

- termina com $c \in \mathbb{R}^m$
- não necessariamente em tempo polinomial

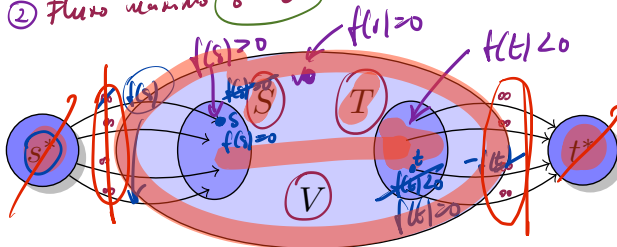


(Fonte: Harris, Ross, Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities, RM-1573, The RAND Corporation, 1955. Liberado pelo Pentagon em 1999.)

Red ① Fluxo máximo $S-T$

② Fluxo máximo S^*-t^*

S : fontes
 T : sumidourea

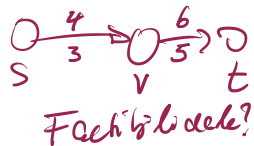
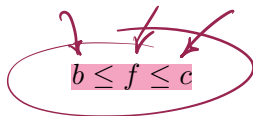


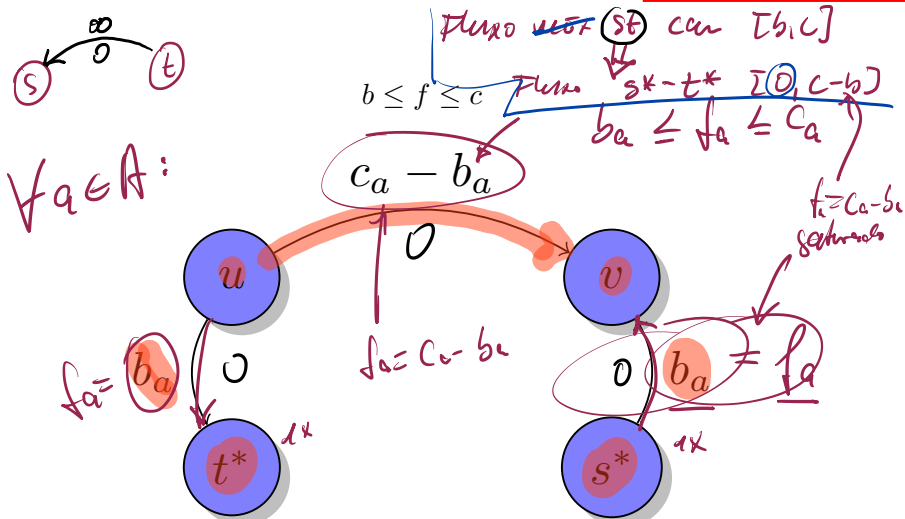
Ass. fluxo máximo $S-T$ ① $\Rightarrow$ ②

Uso: Control. no fluxo $S-t$ para
manter a quantidade $f(s)$ de s^* p/s
 $-f(t)$ de t p/s t^*

Ass. fluxo máx. S^*-t^* imp

$$b \leq c$$





Lema 2.1

O problema original possui um fluxo **viável** sse o problema transformado possui uma fluxo **saturado**.

Todos arcos (u, v)
 (s^*, v) sat.

Demonstração:

Problema original: fluxo viável f $\Rightarrow \exists f'$ saturado no grafo transformado ✓

$\exists f'$ sat. no grafo tran $\Rightarrow f = f' + b$
é um fluxo viável
no grafo original

lema 2.1

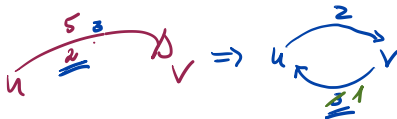
Re da fluxo máx no grafo transf.

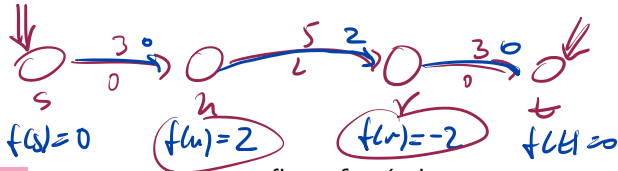
E solução factível se valor fluxo máx.

$$\sum_{a \in A'} c_a$$

$$A' = \{ (u, t^*), a = (u, v) \in A, (t^*, v), a = (u, v) \in A \}$$

- Para encontrar um **fluxo máximo**
 - Maximizar** a partir da solução viável
 - Garantir b_a** : grafo residual G_f com arcos "backward" $\bar{a} = (v, u)$ de capacidade reduzida $c_{\bar{a}} = f_a - b_a$.





- Alternativa para encontrar um fluxo factível



Mandar o fluxo: $f = b$

Converter a balança de fluxo em demandas: $d_v = -f(v)$.

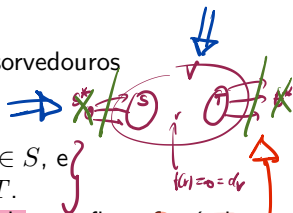
- Circulação factível com $0 \leq f \leq c - b$ no novo grafo corresponde com fluxo factível $f + b$ no original.

- Para demandas $d_v \in \mathbb{R}$, $v \in V$, encontra uma fluxo tal que
 $f(v) = d_v$.

$$f \leq c$$

- Construção:

- Separa fontes $S = \{v \in V \mid d_v < 0\}$ e sorvedouros $T = \{v \in V \mid d_v > 0\}$
- Introduz novos vértices s^* , t^* , e
- arcos (s^*, s) de capacidade $-d_s$ para $s \in S$, e
- arcos (t, t^*) de capacidade d_t para $t \in T$.
- Fluxo **saturado** no novo grafo **corresponde** com fluxo **factível**
(argumento similar ao Lema 2.1)



- Para incluir limites inferiores: modificar as demandas como no exemplo anterior.

$$b \leq f \leq c$$

$$d'_v, \quad v \in V$$

Estratégia: seleciona o caminho mais curto (em número de arcos).
Busca em largura

Teorema 3.1 (Edmonds, Karp 1972)

Algoritmo EK precisa $O(nm)$ iterações, e portanto termina em tempo $O(nm^2)$.

$O(nm^2) \rightarrow$ polinomial

$$O(nm) \neq O(m)$$

Lema: $\delta_f(v)$: distância s-v no grafo residual G_f
 Durante o alg. $\delta_f(v)$ cresce monotonicamente.
 $f \rightarrow f'$ it. i it. i+1 $\forall v \in V: \delta_f(v) \leq \delta_{f'}(v). (*)$

$(u, v): \delta_f(u) \leq n-2$

(u, v) é crítico no
 arco (u, v) 2 vezes
 $\Rightarrow (u, v)$ it. $\square$

Demonstração do lema:

Arco crítico: arco $a = (u, v)$ com cap. res. G_f com aumento
 igual a capacidade $\Rightarrow u$ desaparece na
 prox. iteração

1) Fluxo f : arco a é crítico: $\delta_f(v) = \delta_f(u) + 1$.

2) Des. fluxo f' : Com novo arco crítico (v, u)
 $\delta_{f'}(u) = \delta_{f'}(v) + 1$ (em $G_{f'}$)

$$\delta_{f'}(u) = \delta_{f'}(v) + 1 \geq \delta_f(v) + 1 = \delta_f(u) + 2.$$

Lema

$$\text{em } G: \max_{\text{com. st } P} \min_{a \in P} c_a \Rightarrow \underline{\text{Ex. } O(n \log n + m)}$$

Estratégia: seleciona o caminho de maior gargalo (=mais gordo)

Teorema 3.2 (Edmonds, Karp 1972)

Algoritmo EK precisa $O(nm)$ iterações, e portanto termina em tempo $O(nm^2)$.

polinomial →

$$\begin{aligned} & O(m \log OPT) \text{ iterações} \\ & O(n \log n + m) \text{ por iteração} \\ \hline & O((n \log n + m) m \log OPT) \\ & OPT \leq C \end{aligned}$$

Th O caminho de menor gargalo aumenta o fluxo de valor v por pelo menos $\boxed{OPT/m}$, com OPT o fluxo máx. no grafo residual G_r .

Demonstração: $G_i = G, G_1, G_2, G_3, \dots, G_i$
 $f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \dots \quad f_i$

$$OPT_{i+1} \leq (1 - 1/2m) OPT_i$$

$$OPT_i \leq (1 - 1/2m)^i OPT \leq \underline{e^{-i/2m} OPT}$$

Para capacidades inteiros: por via $OPT_i < 1$

$\Leftrightarrow$ no máx. $2m \ln OPT + 1$ iterações

$\Rightarrow O(m \log OPT)$ iterações



$O(n^2 m C)$	Dantzig [1951a] simplex method
$O(nmC)$	Ford and Fulkerson [1955,1957b] augmenting path
$O(nm^2)$	Dinits [1970], Edmonds and Karp [1972] shortest augmenting path
$O(n^2 n \log n C)$	Edmonds and Karp [1972] fattest augmenting path
$O(n^2 m)$	Dinits [1970] shortest augmenting path, layered network
$O(m^2 \log C)$	Edmonds and Karp [1970,1972] capacity-scaling
$O(nm \log C)$	Dinits [1973a], Gabow [1983b,1985b] capacity-scaling
$O(n^3)$	Karzanov [1974] (preflow push); cf. Malhotra, Kumar, and Maheshwari [1978], Tarjan [1984]
$O(n^2 \sqrt{m})$	Cherkasskiĭ [1977a] blocking preflow with long pushes
$O(nm \log^2 n)$	Shiloach [1978], Galil and Naamad [1979,1980]
$O(n^{5/3} m^{2/3})$	Galil [1978,1980a]

(Fonte: Schrijver, 2004; $C = \|c\|_\infty$)

	$O(nm \log n)$	Sleator [1980], Sleator and Tarjan [1981,1983a] dynamic trees
*	$O(nm \log(n^2/m))$	Goldberg and Tarjan [1986,1988a] <u>push-relabel</u> dynamic trees
	$O(nm + n^2 \log C)$	Ahuja and Orlin [1989] push-relabel + excess scaling
	$O(nm + n^2 \sqrt{\log C})$	Ahuja, Orlin, and Tarjan [1989] Ahuja-Orlin improved
*	$O(nm \log((n/m)\sqrt{\log C} + 2))$	Ahuja, Orlin, and Tarjan [1989] Ahuja-Orlin improved + dynamic trees
*	$O(n^3 / \log n)$	Cheriyani, Hagerup, and Mehlhorn [1990,1996]
	$O(n(m + n^{5/3} \log n))$	Alon [1990] (derandomization of Cheriyani and Hagerup [1989,1995])
	$O(nm + n^{2+\varepsilon})$	(for each $\varepsilon > 0$) King, Rao, and Tarjan [1992]
*	$O(nm \log_{m/n} n + n^2 \log^{2+\varepsilon} n)$	(for each $\varepsilon > 0$) Phillips and Westbrook [1993,1998]
*	$O(nm \log_{\frac{m}{n \log n}} n)$	(King, Rao, and Tarjan [1994])
*	$O(m^{3/2} \log(n^2/m) \log C)$	Goldberg and Rao [1997a,1998]
*	$O(n^{2/3} m \log(n^2/m) \log C)$	Goldberg and Rao [1997a,1998]

 $O(nm)$

Orlin (2012)

(Fonte: Schrijver, 2004; $C = \|c\|_\infty$)