

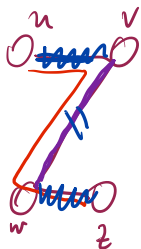


## EMPARELHAMENTOS 2: ALGORITMOS

Marcus Ritt

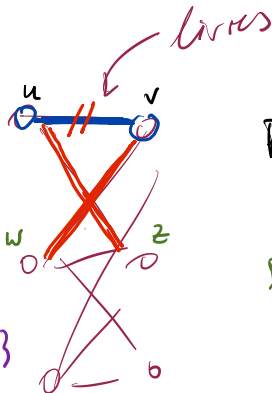
INF 5016/CMP 588 – Algoritmos avançados — Sep 2021 1

## 1. Introdução



$$M = \emptyset \rightarrow M' = \{wv\}$$

$$M^* = \{uw, wz\}$$



$$P = (uv)$$

$$|P| = 1$$

$$P = (uvw)$$

$$P = (wvuz)$$

**Teorema 1.1 (Hopcroft, Karp, 1973)**

Seja  $M^*$  um emparelhamento máximo e  $M$  um emparelhamento arbitrário. O conjunto  $M \oplus M^*$  contém pelo menos  $k = |M^*| - |M|$  caminhos  $M$ -aumentantes disjuntos (de vértices). Um deles possui comprimento menor que  $|V|/k - 1$ .

Prova:

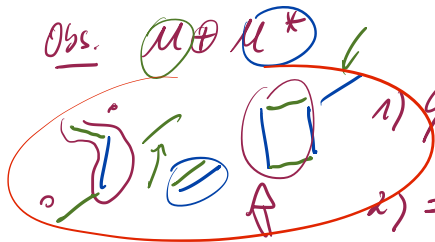
$|V|/k$  vértices

$n = |V|$

$\Rightarrow \leq |V|/k$  vértices

$\Rightarrow \leq |V|/k - 1$  comprimento

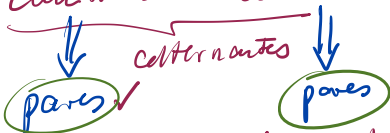
Obs.  $M \oplus M^*$



1) from de cada vértices  $(M \oplus M^*)$   
é no máximo 2.

2)  $\Rightarrow$  vértices isolados

$\Rightarrow$  caminhos + ciclos



ímpares  $\Rightarrow$   $M$ -alternantes

$\uparrow$   $\hookrightarrow$  Começa com aresta  
em  $M^*$  e termina  
com aresta em  $M^*$   
 $\Rightarrow$   $k$  com.

$$\begin{aligned} |M^* \setminus M| &= |M^*| - |M \cap M^*| \\ &= |M| + k - |M \cap M^*| \\ &= |M \setminus M^*| + k \end{aligned}$$

**Corolário 1.1 (Berge 1957)**

Um emparelhamento é máximo sse não existe um caminho  $M$ -aumentante.

$$\text{máximo} \Rightarrow \nexists \text{ cam. } M\text{-aumentante}$$

$$\text{não máximo} \Leftarrow \exists \text{ cam. } M\text{-aumentante}$$

$$k = |M^*| - |M| > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ cam. } M\text{-aument. } \exists$$

# it.  $\leq n/2 \in O(n)$

$M = \emptyset$

while (existe um caminho  $M$ -aumentante  $P$ ) do

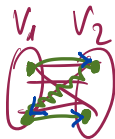
$M := M \oplus P$

end while

return  $M$

**Problema:** como achar caminhos  $M$ -aumentantes eficientemente?

- Considera um caminho  $M$ -aumentante  $P = v_1 \dots v_{2k}$ .
- **Observação:**  $P$  começa em  $v_1 \in V_1$  livre e termina em  $v_{2k} \in V_2$  livre.
- **Idéia:**
  - Busca por largura iniciando dos vértices livres em  $V_1$
  - Segue alternadamente arcos livres em  $M$  para encontrar vizinhos em  $V_2$  e arcos em  $M$ , para encontrar vizinhos em  $V_1$ .
  - Para ao encontrar  $v_2 \in V_2$  livre (ou após de visitar todos os vértices).
- Complexidade  $O(m + n)$ .



### Teorema 1.2

O problema do emparelhamento máximo não-ponderado em grafos bi-partidos pode ser resolvido em tempo  $O(mn)$ .

$$O\left(\frac{n}{2} \cdot (n+m)\right) = O(n^2 + nm) = O(nm)$$

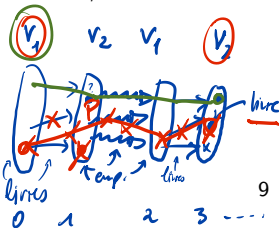
- **Hopcroft & Karp**: → vários caminhos  $M$ -alternantes disjuntos *de vértices*
- **Ideia**: procede em fases, cada fase busca múltiplos caminhos
- (Não necessariamente o maior conjunto, senão: → resolvido.)
- Considere o **DAG** obtido pelo busca em profundidade anterior
- Enquanto existem um vértice livre em  $V_2$ :



- Escolhe  $v \in V_2$  livre
- Segue os predecessores para encontrar um caminho aumentante
- Remove os vértices do caminho, os arcos indicentes, e novos vértices com grau de entrada 0

- → Podemos aplicar todos caminhos
- → A busca ainda tem complexidade  $O(m)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{BL: } O(n+m) \\ \text{RD: } O(n+m) \end{array} \right\} O(n+m) = O(m)$$



→ A nova abordagem é melhor

### Lema 1.1

Em cada fase o comprimento de um caminho aumentante mínimo aumenta por pelo menos dois.

### Lema 1.2

↓ O algoritmo termina em no máximo  $\sqrt{n}$  fases.

### ⇒ Teorema 1.3

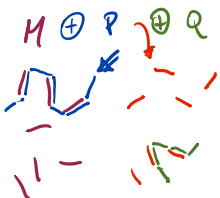
O problema do emparelhamento máximo não ponderado em grafos bi-partidos pode ser resolvido em tempo  $O(m\sqrt{n})$ .

**Lema 1.3**

Seja  $M$  um emparelhamento,  $P$  um caminho  $M$ -aumentante mínimo, e  $Q$  um caminho  $M \oplus P$ -aumentante. Então

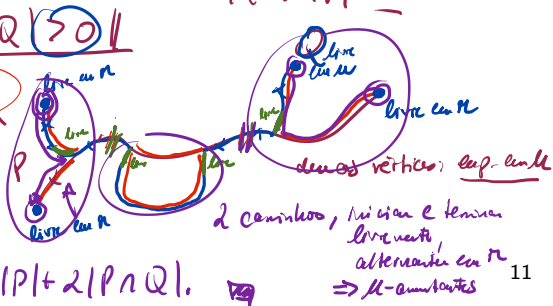
$|Q| \geq |P| + 2|P \cap Q|$ . ( $P \cap Q$  denota as arestas em comum entre  $P$  e  $Q$ .)

Demonstração:



Obs.  $|P \oplus Q| \geq 2|P|$

a)  $|P \cap Q| = 0$   
b)  $|P \cap Q| > 0$



$$|Q| = |P \oplus Q| + 2|P \cap Q| - |P| \geq |P| + 2|P \cap Q|.$$



Fase: Caminhos aumentados  $P_1, P_2, \dots, P_j$   $|P_1| = |P_2| = \dots = |P_j|$

Próx. fase: Caminho aumentado  $P$

$$|P| \geq |P_j| + 2$$

caso necessário

a)  $P$  disjunta (v.) de todos  $P_j$

$$|P| = |P_j| \quad \nrightarrow \quad |P| \geq |P_j| + 2$$

b) então:  $|P \cap P_j| > 0$

$$|P| \geq |P_j| + 2 |P \cap P_j| \geq |P_j| + 2.$$

□

Considere: depois de  $T_n/2$  fases.

$\Rightarrow$  Compr. de  $q_i$  com  $M$ -conten.  
pelo num  $T_n$

$\Rightarrow$  no máximo  $(T_n)$  casais  $M$ -con.  
disjuntos de vértices

$\Rightarrow |M^*| - |M| \leq T_n$

$\Rightarrow \# \text{ de fases restantes} \leq T_n$

$\# \text{ fases: } \leq T_n/2 + T_n = \underline{O(T_n)}.$

- Hopcroft & Karp
    - Compare to Dinitz
    - Melhor algoritmo para emparelhamentos máximos em grafos bipartidos não-ponderados esparsos
- caso particular*  
 *$O(\sqrt{m})$*