Exercícios Unidade 1

- Cada questão contribui 0.2 pontos para Prova 1. **Prazo de entrega fixo**: antes da prova.
- As questões são individualizadas e se referem aos números do cartão $n_1, n_2, \ldots, n_8$ (com dígitos 1 na esquerda para completar 8 dígitos, caso necessário). Exemplo: para cartão 93350 temos $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 9, n_5 = 3, n_6 = 3, n_7 = 5, n_8 = 0$.

Questão 1 (Fabricação)

Uma empresa está interessada em maximizar o lucro mensal de quatro de seus produtos. Para fabricar esses produtos ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de matéria prima que têm as seguintes disponibilidades:

Máquinas	Tempo Disponível (máquina-hora/mês)	Matéria Prima	Disponibilidade (unidades/mês)
M1	80	MP1	120
M2	20	MP2	160

O setor técnico da empresa fornece os seguintes quadros de produtividade:

- Máquinas-hora necessárias para produzir uma unidade de cada produto:

Máquinas	Produtos			
	P1	P2	P3	P4
M1	n_1	n_2	n_3	n_4
M2	n_5	n_6	n_7	n_8

- Matéria prima necessárias para produzir uma unidade de cada produto:

Matéria-prima	Produtos			
	P1	P2	P3	P4
M1	2	4	2	8
M2	7	3	0	7

O setor comercial da empresa fornece os seguintes informações:

Produtos	Máximo de vendas (Unidades/Mês)	Lucro Unitário (Reais/Unidade)
P1	70	10
P2	60	8
P3	40	9
P4	20	7

Deseja-se saber a produção mensal dos produtos para que o lucro mensal da empresa seja o máximo. Formule um modelo de programação linear.

Questão 2 (Transporte em grafos)

Temos um grafo direcionado $G = (V, A)$. Cada vértice do grafo ou produz ou consome um certa quantidade de um produto. Isso é dado por uma demanda $b_v \in \mathbb{R}$ para $v \in V$. Caso $b_v > 0$ o vértice precisa receber uma quantidade de b_v do produto, caso $b_v < 0$ o vértice produz uma quantidade de b_v do produto. (Caso $b_v = 0$ o vértice nem produz nem consome o produto.) Queremos mandar o produto dos produtores para os consumidores usando os arcos do grafo, tal que o custo de transporte é mínimo. O transporte em cada arco $a \in A$ custa c_a reais por unidade de produto transportado. Além disso temos limites de transporte: a quantidade transportada no arco $a \in A$ tem que ser entre l_a e u_a. Formula um programa linear que resolve o problema.

Questão 3 (Formulação Matemática)

Anualmente as bruxas festejam durante a Noite de Santa Valburga no Blocula. Neste ano eles querem comer algo especial e escolheram como ingredientes línguas de cotovia, narizes de lontras, baços de ocelote, e fígados de carriças. Como tais ingredientes são difíceis de conseguir, eles podem usar somente as quantidades máximas mostradas na tabela abaixo. Cada ingrediente possui uma quantidade de energia oculta e de Ψ por grama, também mostrado na tabela. As bruxas querem maximizar a energia oculta garantindo que o Ψ médio resultante é entre 3 e 5. Além disso, para um bom gosto, é necessário manter a proporção de baços de ocelote entre 1.5 e 2 vezes da quantidade de fígados de carriças. Ajuda-las formulando um programa linear que determina as quantidades ótimas.

Ingrediente	Quant. máx. disp. (g)	Energia oculta (por g)	Ψ (por g)
Línguas de cotovia	200	31	3
Narizes de lontras	500	41	7
Baços de ocelote	350	$10n_4 + n_5$	7
Fígados de carriças	100	26	2

(Lembre-se de que n_4 e n_5 são o quinto e o quarto dígitos a partir da direita da cartão.)

Questão 4 (Solução de sistemas lineares)

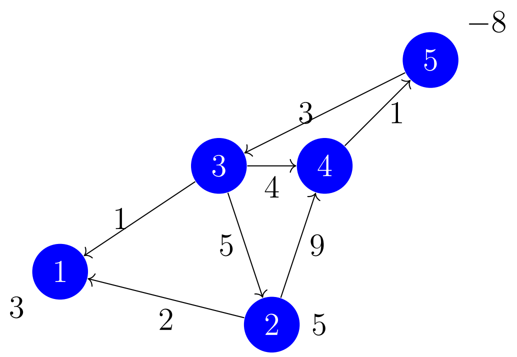
Resolve usando o método Simplex aplicando a regra de Bland.

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10n_7 + n_8, \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ & -2x_1 - x_3 \geq -8, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Lembre-se de que n_7 e n_8 são os últimos dois dígitos da cartão.)

a) Qual o sistema em forma normal?

b) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = \{(2,1), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,5), (5,3)\}$

v	1	2	3	4	5
b_v	3	5	0	0	-8

a	(2,1)	(2,4)	(3,1)	(3,2)	(3,4)	(4,5)	(5,3)
c_a	2	9	1	5	4	1	3

Figura 1: Exemplo da questão 2 sem limites inferiores e superiores. Os valores nas arestas são os custos de transporte. O fluxo ótimo é 8 no arco $(5,3)$, 3 no arco $(3,1)$ e 5 no arco $(3,2)$, com custo total $8 \times 3 + 3 \times 1 + 5 \times 5 = 52$

c) Explique brevemente a regra de Bland.

d) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

Questão 5 (Solução de sistemas lineares)
Resolve usando o método Simplex.

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 3x_1 + n_6\, x_2 + 3x_3 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Lembre-se de que n_6 é o terceiro dígito da direita da cartão.)

a) Qual o sistema em forma normal?

b) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

c) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?