



MÉTODO SIMPLEX 1

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-05-11
seg>

1. Método Simplex 1

$$\begin{array}{l}
 \text{max. } c^t x, \\
 \text{s.a. } Ax \leq b, \\
 \boxed{x \geq 0} \leftarrow \text{não-negativos.}
 \end{array}$$

1. Minimização para maximização

$$\min c^t x \iff -\max -c^t x$$

2. Sentido de uma desigualdade

$$a_i x \geq b_i \iff -a_i x \leq -b_i$$

3. Igualdade para desigualdades

$$\begin{array}{l}
 a_i^t x = b_i \iff \underline{a_i^t x \leq b_i} \wedge \underline{a_i^t x \geq b_i} \\
 a_i^t x \leq b_i \quad -a_i^t x \leq -b_i
 \end{array}$$

4. Desigualdade para igualdade $a_i x \leq b$ *variável de folga*

$3 \leq 3$ *folga 0* $2 \leq 3$ *folga 1*
 $3+x=3$ $2+x=3$ $x=1$

$$a_i x \leq b \iff a_i x + x_{n+1} = b_i \wedge x_{n+1} \geq 0$$

$$a_i x \geq b \iff a_i x - x_{n+1} = b_i \wedge x_{n+1} \geq 0$$

var. de excesso

5. Variável irrestrita para não-negativas

$x_i \in \mathbb{R}$
 $x_i \geq 0$

$x_i^+ \geq 0 \wedge x_i^- \geq 0$
 $x_i = x_i^+ - x_i^-$
 $x_i \rightarrow x_i^+ - x_i^-$

x_i	x_i^+	x_i^-
5	5	0
-3	0	3
5	6	1
5	7	2
-3	1	4
-3	2	5

minimiza $3x_1 - 5x_2 + x_3$
 sujeito a $x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$,
 $5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 200$,
 $2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 500$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

$x_3 \geq 0 \quad x_3 \mapsto x_3^+ - x_3^-$
 $x_3^+, x_3^- \geq 0$

$-\max. -3x_1 + 5x_2 - x_3$

s.a. $-x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$

$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 200$

$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 500$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

FN

$-\max. -3x_1 + 5x_2 - x_3^+ + x_3^-$

s.a. $-x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- \leq 0$,

$5x_1 + 3x_2 + x_3^+ - x_3^- \leq 200$,

$2x_1 + 8x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- \leq 500$,

$x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$.

$$PL \in P$$

- Método gráfico: impraticável ≤ 2 var.
- Enumeração: exponencial
- Porém: Existem algoritmos polinomiais para LP^P (e.g. método de elipsoides)
- Método Simplex: não é conhecidamente polinomial.

$$\text{Emp. } O((n+m)^{4.1})$$

n : # variáveis

m : # restrições

	Var. originais	Var. folga
Discreto	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$w_1, w_2, \dots, w_m$
Genl	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$

Programa linear em forma normal:

maximiza $z = 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4$
sujeito a $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5, +w_1 = 5$
 $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3, +w_2 = 3$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

~~maximiza~~ $z = 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4$ (1)

~~sujeito a~~ $w_1 = 5 - 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4,$ (2)

$w_2 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4,$ (3)

$x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2 \geq 0.$

Dicionário ($\neq$ Tableau)

Solução: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ $\leftarrow$
 + valor $w_1 = 5$; $w_2 = 3$; $z = 0$.

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
z	0	$+6x_1$	$+8x_2$	$+5x_3$	$+9x_4$	
w_1	5	$-2x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-3x_4$	
w_2	3	$-x_1$	$-3x_2$	$-x_3$	$-2x_4$	

Varáveis básicas (indicadas por uma bracejada vermelha ao lado da primeira coluna)
Varáveis nulas (indicadas por uma bracejada vermelha sob a última coluna)

- Simples nessa forma: extrair a solução viável e o seu valor

Observação: aumentar o valor de qq. variável nula com coeficiente positivo na função objetivo aumenta o valor da f.o.

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, w_1 = 5, w_2 = 0, z = 0$
 $\triangleright \boxed{x_1=1} \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0, w_1 = 3, w_2 = 2, \boxed{z=6}$
 $\boxed{x_2=2} \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0, w_1 = 1, w_2 = 1, z = 12$
 $\boxed{x_1=3} \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0, w_1 = -1, w_2 = 0, z = 18$ *infeasible*

z	$= 0$	$+6x_1$	$+8x_2$	$+5x_3$	$+9x_4$
w_1	$= 5$	$-2x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-3x_4$
w_2	$= 3$	$-x_1$	$-3x_2$	$+x_3$	$-2x_4$

$w_1 = 5 - 7x_1 \geq 0$
 $w_2 = 3 - 2x_1 \geq 0$
 $x_1 \leq 5/7 = 1.6$ e $x_1 \leq 3/2 = 1.5$
 $x_1 = 1.5$

Qual o maior valor de x_1 tal que a solução resultando ainda é viável?

$$x_1 = 2.5, x_2 = x_3 = x_4 = 0; w_1 = 0, w_2 = 0.5; z = 15.$$

Qual o maior valor de x_2 tal que a solução resultando ainda é viável?

$$\begin{aligned}
 & \boxed{w_1 = 5 - x_2 \geq 0} \quad \text{e} \quad 5 \geq x_2 \\
 & \boxed{w_2 = 3 - 3x_2 \geq 0} \quad \text{e} \quad 3 \geq 3x_2 \Leftrightarrow 1 \geq x_2 \Rightarrow x_2 = 1
 \end{aligned}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0; w_1 = 4, w_2 = 0; z = 8$$

- Candidatos para o aumento: todas variáveis nulas com coeficiente positivo
- No exemplo? $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \rightarrow$
- Regra de Dantzig: selecionar a variável de maior coeficiente (desempate: arbitrário)

$\rightarrow (x_4)$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$\begin{aligned} w_1 = 5 - 3x_4 &\geq 0 \iff x_4 \leq 5/3 \\ w_2 = 3 - 2x_4 &\geq 0 \iff x_4 \leq 3/2 \end{aligned} \quad e$$

$$x_4 = 1,5 \\ = 3/2$$

- Uma variável nula tem um valor positivo
- Uma variável básica tem valor 0

$$x_4 = 3/2$$

Logo:

- A variável nula vai entrar na base: variável entrante
- A variável básica vai sair da base: variável sainte
- Isso define um pivô

$$x_4 \leftarrow w_2$$

entrante sainte

Para finalizar:

- Re-escrever o dicionário
- Equivalente à eliminação da variável nula do sistema

Handwritten simplex tableau for the 'Re-escrita' step:

z	$= 0$	$+6x_1$	$+8x_2$	$+5x_3$	$+9x_4$	
w_1	$= 5$	$-2x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-3x_4$	(1)
w_2	$= 3$	$-x_1$	$-3x_2$	$-x_3$	$+2x_4$	(2)

Row operations and resulting equations:

- $(1) = (1) + \frac{9}{2}(2)$
- $(2) = (2) - \frac{3}{2}(3)$
- $(3')$

Final tableau (after pivot on x_4):

x_4	$= 3$	$-1/2x_1$	$-3/2x_2$	$-1/2x_3$	$-1/2x_4$	
-------	-------	-----------	-----------	-----------	-----------	--

Red annotations indicate the pivot element (2) in row 2, column 6, and the resulting equations. Green annotations highlight the pivot column (x_4) and the pivot row (row 2).

$$\begin{array}{rcll}
 z & = & 27/2 & +3/2x_1 - 11/2x_2 + 1/2x_3 - 9/2w_2 \\
 \triangleright w_1 & = & 1/2 & -1/2x_1 + 7/2x_2 + 1/2x_3 + 3/2w_2 \\
 x_4 & = & 3/2 & -1/2x_1 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2w_2
 \end{array}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = w_2 = 0$$

$$w_1 = 1/2, \quad x_4 = 3/2 \quad z = 27/2 = 13.5$$

Próximo $x_1 - w_1$

Pivô: $x_2 - x_4$

$$\begin{array}{rclclcl}
 z & = & 15 & -3w_1 & +5x_2 & +2x_3 \\
 \hline
 x_1 & = & 1 & -2w_1 & +7x_2 & +x_3 +3w_2 \\
 x_4 & = & 1 & +w_1 & -5x_2 & -x_3 -2w_2
 \end{array}$$

z	$= 16$	$-2w_1$	$-x_4$	$+x_3$	$-2w_2$
x_1	$= 12/5$	$-3/5w_1$	$-7/5x_4$	$-2/5x_3$	$+1/5w_2$
x_2	$= 1/5$	$+1/5w_1$	$-1/5x_4$	$-1/5x_3$	$-2/5w_2$

Pivô: $x_3 - x_2$

$$\begin{array}{l}
 \Delta \\
 \Delta
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 z = 17 \\
 x_1 = 2 \\
 x_3 = 1
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 -w_1 & -2x_4 & -5x_2 & -4w_2 \\
 -w_1 & -x_4 & +2x_2 & +w_2 \\
 +w_1 & -x_4 & -5x_2 & -2w_2
 \end{array}
 \Bigg|$$

- O que acontece caso não tem mais candidatos para entrar?
- O método para
- Nota: corretude parcial segue

$$z = 17 - w_1 - 2x_4 - 5x_2 - 4w_2 \leq 17$$

- Sem repetir bases: corretude total