



MÉTODO SIMPLEX 2

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-05-11
seg>

1. Resumo *núcleo* do método Simplex
2. Sistemas **ilimitados** e ótimos
3. Encontrar uma **solução inicial**
4. Sistemas **degenerados**

1. Coloca o sistema em **forma normal**
2. Introduz **variáveis de folga**, cria o **dicionário inicial**
3. Repete: aplica um pivô até não da mais.
4. Para: a solução está ótima.



n var.,
m rest.

maximiza $z = 0 + \sum_{j \in [n]} c_j x_j$

sujeito a $\sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j \leq b_i,$

$x_j \geq 0,$

$i \in [m],$

$j \in [n].$

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i \in [m],$$

$x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m$

$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$

x_{n+i}
 w_i : var folga
 i-ésima rest.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$$\boxed{x_{n+i} = b_i} \quad i \in [m].$$

$$\triangleright z = \boxed{0} + \sum_{j \in [n]} \boxed{c_j} x_j$$

$$\triangleright \underbrace{x_{n+i}}_{\substack{\uparrow \\ \text{básicas}}} = \boxed{b_i} - \sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j, \quad i \in [m].$$

$$\underbrace{B = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}}_{\substack{\uparrow \\ \text{básicas}}} \quad \underbrace{N = \{1, 2, \dots, n\}}_{\substack{\text{nucl. } x_1, \dots, x_n}}$$

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j,$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j,$$

$$i \in \mathcal{B}.$$

$\bar{}$ = valor atual

$\bar{z}$: valor atual da f.o.

$\bar{c}_j$: coeficientes
atuais (f.o.)

$\bar{a}_{ij}$: coeficientes atuais
(restriç.)

$\bar{b}_i$: valores atuais das
var. básicas.

$$z = 0 + x_1 + x_2$$

$$\text{Ex.} \quad \downarrow$$

$$z = 13 + 2x_1 - 7x_2$$

$$x_3 = 3 - x_1 + x_2 \quad x_4 = 3$$

$$x_5 = 2 - 3x_1 + 7x_2 \quad x_6 = 2/3$$

$$N = \{1, 2\}$$

$$\bar{c}_1 = -2$$

$$\bar{c}_2 = -7$$

Caso não tem mais candidatos p/ variável entrante: para.

- Candidatos: variáveis nulas com valor positivo

$$k \in \{j \in N \mid \bar{c}_j > 0\} \leftarrow \emptyset$$

- Selecionar uma variável entrante x_k entre eles
- Regra do maior coeficiente (Dantzig):

$$k \in \arg\max \{\bar{c}_j \mid \bar{c}_j > 0, j \in N\}$$

Seleciona o candidato de maior coeficiente

$$\max \{c_1, c_2, c_3, c_4\} = 7$$

$$\arg\max \{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{3, 4\}$$

	c_1	c_2	c_3	c_4
	2	1	7	7

- Aumentando x_k as variáveis básicas têm novos valores

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} x_k \quad i \in \mathcal{B}.$$

$$\bar{b}_i \geq \bar{a}_{ik} x_k$$

$\rightarrow \bar{a}_{ik} = 0$
 $\rightarrow \bar{a}_{ik} < 0$

- Cada equação com $\bar{a}_{ik} > 0$ fornece uma cota superior para x_k

$$x_k \geq -2$$

$$x_k \geq 0$$

$$x_k \leq \bar{b}_i / \bar{a}_{ik}$$

$$x_k \geq -2$$

$$x_k \geq 0$$

$$\begin{cases} \geq 0 \rightarrow \bar{b}_i / \bar{a}_{ik} \leq x_k \\ < 0 \rightarrow \bar{b}_i / \bar{a}_{ik} \geq x_k \end{cases}$$

- Maior valor de aumento:

Menor limite

$$\alpha = \min_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ \bar{a}_{ik} > 0}} \bar{b}_i / \bar{a}_{ik}$$

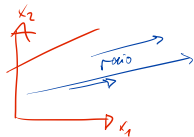
- Seleciona uma variável sainte entre os candidatos

$$\triangleright \{i \in \mathcal{B} \mid \bar{b}_i / \bar{a}_{ik} = \alpha\}.$$

Candidatos var. entrante: x_2

Candidatos var. saínte:

alpha=

 ∞ 

$$\begin{array}{rcll}
 z & = & 24 & -x_1 & +2x_2 \\
 \hline
 x_3 & = & 2 & -x_1 & +x_2 \\
 x_4 & = & 5 & +x_1 & +4x_2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad x_3 &= 2 - x_1 + x_2 \geq 0 \\
 2) \quad x_4 &= 5 + x_1 + 4x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Não tem
limite!

$$\begin{aligned}
 x_2 &\geq -2 \\
 x_2 &\geq -5/4
 \end{aligned}$$

Como detectar sistemas ilimitados?

Algum pivô vai ser sem candidatos p/ var. saínte,

Soluções:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 \text{ a } b \geq 0$$

$$x_3 = 2 + x_2 \geq 0$$

$$x_4 = 5 + 4x_2 \geq 0$$

Para: sistema é ilimitado.

$$\begin{aligned}
 z &= 24 + 2x_2 \\
 &\geq 10^6
 \end{aligned}$$

- O que acontece caso não tem mais candidatos para entrar?
- O método para.

- Nota: **corretude parcial** segue
caso para é correto/ótimo

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

$$\bar{c}_j \leq 0 \quad x_j \geq 0 \quad \Rightarrow z^* = \bar{z}$$

$$R = 13 - 2x_1 - 3x_2 \leq 13$$

$$\Rightarrow z^* = 13$$

com $\bar{c}_j \leq 0$. $x_j \geq 0$

Sem repetir bases: **corretude total**.
+ parada

$max \quad x_1, x_2$
 $S.o. \quad x_1 + x_2 \leq -7 \quad +3=0$
 $-x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad +3=0$
 $x_1 + x_2 + w_1 = -3$
 $-x_1 + 2x_2 - w_2 = 3$
 $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$

$z = 0 + x_1 + x_2$
 $w_1 = -x_1 - x_2$
 $w_2 = -x_1 + 2x_2$

$x_1 + x_2 \leq -3$
 $x_1 + x_2 + w_1 = -3$
 $-x_1 - x_2 \geq 3$
 $-x_1 - x_2 - w_1 = 3$
 $w_1 \geq 0$

$z = 0 + \sum_{j \in [n]} c_j x_j$

$x_{n+i} = b_i - \sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j, \quad i \in [m].$

$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$
 $x_{n+1} = b_1$
 $x_{n+2} = b_2$
 $x_{n+m} = b_m$

com solução inicial

$$x = (0 \dots 0 \ b_1 \dots b_m)^T$$

$$x_i \geq 0$$

Problema: caso um $b_i < 0$ a solução não está viável

x_0 : var. auxiliar

- Ideia: Relaxa os lados direitos até a solução fica viável
- Melhor: fazer de forma simbólica, e desfazer
- Implementação: sistema auxiliar

min. x_0

maximiza $z = -x_0$

sujeito a $\sum_{j \in [n]} a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i, \quad 0 \leq i \leq m,$

$x_i \geq 0,$

$i \in \{1, \dots, n\}$

sys. aux.

$x_0 \geq 0$

- Solução: $x_i = 0, i \in [n]$, e qualquer $x_0 \geq \max_{i \in [m]} -b_i$
- Implementação disso: *pseudo-pivô* x_0 e variável básica mais negativa!

maximiza

$$z = -2x_1 - x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -1, \\ -x_1 - 2x_2 &\leq -2, \end{aligned}$$

$$x_2 \leq \underline{1},$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

min. x_0

maximiza $z = -x_0$

sujeito a

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 - x_0 &\stackrel{+w_1}{\leq} -1, \\
 -x_1 - 2x_2 - x_0 &\stackrel{+w_2}{\leq} -2, \\
 x_2 - x_0 &\stackrel{+w_3}{\leq} 1, \\
 x_0, x_1, x_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

E S
 $x_0 - w_2$

Pseudo pivô

z	$=$				$-x_0$	
w_1	$=$	-1	$+x_1$	$-x_2$	$+x_0$	≥ 0
w_2	$=$	-2	$+x_1$	$+2x_2$	$+x_0$	≥ 0
w_3	$=$	1		$-x_2$	$+x_0$	≥ 0

$x_0 = 2$

$x_0 = 0$ nula

$x_0 = 2 - x_1 - 2x_2 + w_2$

O processo de setar x_0 para o valor inicial: pode ser realizado por um pivô especial: (pseudo-pivô): x_0 com a var básica mais negativa.

Consequencia do pseudo-pivô: sol. factível do sistema aux.

Exemplo: Dicionário inicial viável do sistema auxiliar

z	$= -2$	$+x_1$	$+2x_2$	$-w_2$	
w_1	$= 1$		$-3x_2$	$+w_2$	≥ 0
x_0	$= 2$	$-x_1$	$-2x_2$	$+w_2$	≥ 0
w_3	$= 3$	$-x_1$	$-3x_2$	$+w_2$	≥ 0

Aplica o método Simplex normal.

$$\begin{array}{rclcl}
 z & = & -4/3 & +x_1 & -2/3w_1 & -1/3w_2 \\
 \hline
 | \ x_2 & = & 1/3 & & -1/3w_1 & +1/3w_2 \\
 \triangleright \ x_0 & = & 4/3 & -x_1 & +2/3w_1 & +1/3w_2 \\
 w_3 & = & 2 & -x_1 & +w_1 &
 \end{array}$$

rule
 $b_0 \geq 0$

d.o. original

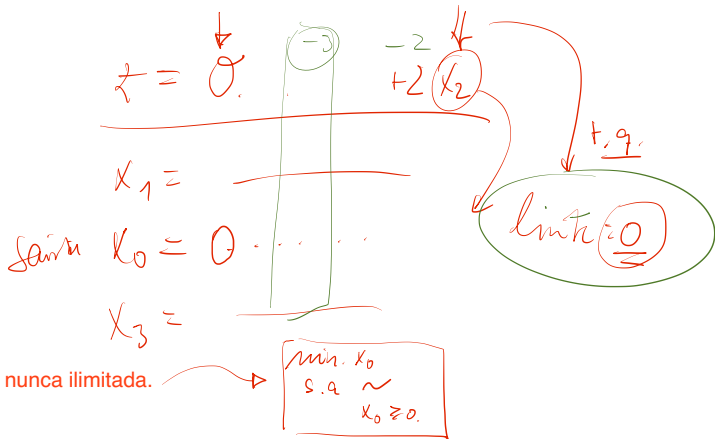
$-w_1$ $-w_2$

z	$= -3$	$-x_0$		
z	$= 0$	$-x_0$		
x_2	$= -1/3$	$-x_0$	$-1/3w_1$	$+1/3w_2$
x_1	$= 4/3$	$-x_0$	$+2/3w_1$	$+1/3w_2$
w_3	$= 2/3$	$-x_0$	$+1/3w_1$	$-1/3w_2$

Solução ótima!

do sistema auxiliar = sol. factível do sistema original

$$\begin{aligned}
 -2x_1 - x_2 &= -2\left(4/3 + 2/3w_1 + 1/3w_2\right) \\
 &\quad -\left(-1/3 - 1/3w_1 + 1/3w_2\right) \\
 &= -3 - w_1 - w_2
 \end{aligned}$$

Fase IFazer outro pivô que remove x_0
da base.

3

ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO INICIAL
(Branco)

MÉTODO SIMPLEX 2

- Caso o sistema original possui solução, o sistema auxiliar também possui uma solução com $x_0 = 0$.
- Logo, após aplicar o método Simplex ao sistema auxiliar, temos os casos
 - $x_0 > 0$: O sistema original não tem solução. Para: infactível.
 - $x_0 = 0$: O sistema original tem solução. Podemos descartar x_0 e continuar resolvendo o sistema original com a solução básica viável obtida.
- A solução do sistema auxiliar se chama *fase I*, a solução do sistema original *fase II*.

Fase I necessária? Caso $b_i \geq 0$ para todo $i \in [m]$: aplica fase II.

Dicionário inicial Cria o dicionário inicial do sistema auxiliar

Sistema aux.
$$z = \min\{x_0 \mid Ax \leq b + x_0 e\}.$$

Pseudo-pivô Pivota $x_0 - x_k$, sendo $k = \operatorname{argmin}_{i \in [m]} b_k$ o índice do lado direito mais negativo.

Solução fase I Aplica o método Simplex

Fase II necessária? Caso a solução ótima da fase I possui valor $x_0 > 0$: o sistema original não possui solução. Para.

Prepara fase II Caso x_0 é uma variável básica: pivota $x_0 - x_k$ sendo x_k alguma variável nula tal que $\bar{a}_{0k} \neq 0$. Remove coluna x_0 . Remove a função objetivo do sistema auxiliar e introduz a função objetivo do sistema original (escrita em função das variáveis nulas).

Fase II Aplica o método Simplex no dicionário inicial da fase II.

- Um dicionário é *degenerado* se existe um $i \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{b}_i = 0$.
- Problema: pode acontecer um pivô que não aumenta a variável entrante, e portanto não aumenta o valor da função objetivo.
- Tais pivôs são *degenerados*.
- Problema maior: terminação.

$$\begin{array}{rclcl} z & = & 5 & +x_3 & -x_4 \\ \hline x_2 & = & 5 & -2x_3 & -3x_4 \\ x_1 & = & 7 & & -4x_4 \\ w_3 & = & 0 & & +x_4 \end{array}$$

- x_2 é a variável sainte e o valor da função objetivo aumenta.

$$\begin{array}{rclclcl}
 z & = & 3 & -1/2x_1 & +2x_2 & -3/2w_1 \\
 \hline
 x_3 & = & 1 & -1/2x_1 & & -1/2w_1 \\
 w_2 & = & 0 & +x_1 & -x_2 & +w_1
 \end{array}$$

- Se a variável saínte é determinada pela equação com $\bar{b}_i = 0$, temos um *pivô degenerado*.
- Nesse caso, a variável entrante não aumenta: temos a mesma solução depois do pivô.

$$\begin{array}{rcllcl}
 z & = & 3 & +3/2x_1 & -2w_2 & +1/2w_1 \\
 \hline
 x_3 & = & 1 & -1/2x_1 & & -1/2w_1 \\
 x_2 & = & 0 & +x_1 & -w_2 & +w_1
 \end{array}$$

- O valor da função objetivo não aumentou!

$$\begin{array}{rclclcl}
 z & = & 6 & -3x_3 & -2w_2 & -w_1 \\
 \hline
 x_1 & = & 2 & -2x_3 & & -w_1 \\
 x_2 & = & 2 & -2x_3 & -w_2 &
 \end{array}$$

- A segunda iteração aumentou o valor da função objetivo!

