



MÉTODO SIMPLEX 3

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-05-11
seg>

1. Encontrar uma solução inicial
2. Sistemas degenerados

Método de duas fases.

Fase I necessária? Caso $b_i \geq 0$ para todo $i \in [m]$: aplica fase II.

Dicionário inicial Cria o dicionário inicial do sistema auxiliar

$$z = \min\{x_0 \mid Ax \leq b + x_0 e\}.$$

Pseudo-pivô Pivota $x_0 - x_k$, sendo $k = \operatorname{argmin}_{i \in [m]} b_k$ o índice do lado direito mais negativo.

Solução fase I Aplica o método Simplex regular no dicionário resultante.

Sistema auxiliar: sempre possui uma sol. (por construção), e nunca é ilimitado.

Fase II necessária? Caso a solução ótima da fase I possui valor $x_0 > 0$: o sistema original não possui solução. Para.

Remove x_0 da base Caso x_0 é uma variável básica: pivota $x_0 - x_k$ com x_k uma variável nula com $\bar{a}_{0k} \neq 0$.

Prepara fase II Remove coluna x_0 . Remove a função objetivo do sistema auxiliar e introduz a função objetivo do sistema original (escrita em função das variáveis nulas).

Fase II Aplica o método Simplex regular no dicionário inicial da fase II.

Descobrimos uma
rest. redundante.

$$0 = 0$$

Ir para fase II

$$x_0 = 0$$

f.o. sol. aux



$$\begin{array}{rcllcl}
 z = & 0 & -1/2x_4 & & -1/2x_5 & \\
 z = & 40 & 2x_4 & | & 7x_3 & | 2x_5 \quad \leftarrow \text{S.O.} \\
 \hline
 x_1 = & 10 & -1/2x_4 & -x_2 & -x_3 & +1/2x_5 \\
 x_4/5 \quad x_0 = & 0 & +1/2x_4 & & +1/2x_5 & \\
 x_6 = & 9 & & -2x_2 & -x_3 & +x_5 \\
 x_7 = & 0 & +3/2x_4 & -x_2 & +x_3 & -1/2x_5
 \end{array}$$

Ans:

$$\begin{aligned}
 x_4 - x_6 \\
 x_5 - x_0
 \end{aligned}$$

- Sempre vai existir uma variável com $\bar{a}_{0k} \neq 0$ $\Leftarrow$
- O pivô com qualquer uma dessas variáveis remove x_0 da base

$$x_1 = 10, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x_6 = 9, x_7 = 0 \quad | \quad x_0 = 0$$

sol. sistema original

- Um dicionário é **degenerado** se existe um $i \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{b}_i = 0$.
- Problema: pode acontecer um pivô que não aumenta a variável entrante, e portanto não aumenta o valor da função objetivo.
- Tais pivôs são **degenerados**.
- Problema maior: terminação.

Fica no mesmo
ponto, não faz
progresso.

Handwritten notes illustrating degeneracy:

- Equation: $z = \dots + 9x_2$ (with x_2 crossed out and x_5 written below it).
- Equation: $x_5 = 0 \dots - 3x_2$ (with x_5 crossed out and x_2 written below it).
- A boxed note: $Linha 0$ (Row 0).

Perigo: ciclagem.

$$\begin{array}{rcll}
 z & = & 5 & \text{pin 1} \\
 \hline
 x_2 & = & 5 & \text{K}_2 - \text{K}_3 \quad g_2 \\
 x_1 & = & 7 & \text{K}_3: 0 \mapsto g_2 \\
 w_3 & = & 0 & z: 5 \mapsto \underline{7.5}
 \end{array}$$

$\oplus x_3$ ∇ x x

Dic. deg.

- x_2 é a variável sainte e o valor da função objetivo aumenta.

$$\begin{array}{rcl} z & = & 3 \\ x_3 & = & 1 \\ w_2 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -1/2x_1 & + 2x_2 & -3/2w_1 \\ -1/2x_1 & & -1/2w_1 \\ +x_1 & -x_2 & +w_1 \end{array}$$

Limits: $\emptyset$ Pivots: $x_2 - w_2$ é deg.
 $x_2: 0 \mapsto 0$
 $w_2: 0 \mapsto 0$
 $x_3: 1 \mapsto 1$

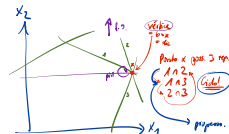
- Se a variável *sainte* é determinada pela equação com $\bar{b}_i = 0$, temos um *pivô degenerado*.
- Nesse caso, a variável entrante não aumenta: temos a mesma solução depois do pivô.

Pivô: $x_1 - x_3$ $x_1: 0 \rightarrow 2$

$$\begin{array}{rcll}
 z & = & 3 & +3/2x_1 & -2w_2 & +1/2w_1 \\
 \hline
 -x_3 & = & 1 & -1/2x_1 & & -1/2w_1 \\
 x_2 & = & 0 & +x_1 & -w_2 & +w_1
 \end{array}$$

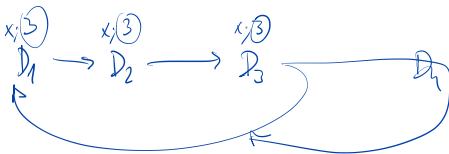
- O valor da função objetivo não aumentou!

A sol. é a mesma.



$$\begin{array}{rcll}
 z & = & 6 & -3x_3 & -2w_2 & -w_1 \\
 \hline
 x_1 & = & 2 & -2x_3 & & -w_1 \\
 x_2 & = & 2 & -2x_3 & -w_2 &
 \end{array}$$

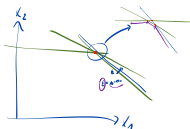
- A segunda iteração aumentou o valor da função objetivo!



Existem sistemas que ciclam!

$\Rightarrow$ Exemplo nas notas.

Logo: o método Simplex poderia não terminar
 $\Rightarrow$ perder a corretude total.



• Ignora o problema (ou perturba numericamente).

• Método lexicográfico (perturba simbolicamente).

• Regra de Bland.

} garantir
terminação
com custo
extra

- Introduzimos perturbações simbólicas

$$\text{const.} \gg \boxed{\epsilon_1} \gg \boxed{\epsilon_2} \gg \dots \gg \boxed{\epsilon_m} > 0.$$

Handwritten notes: $2, 3, \pi$ under ϵ_1 ; arrows pointing to ϵ_1 and ϵ_2 ; $m: \# \text{ restr}$ near ϵ_m .

em cada equação.

- Característica: Todo ϵ_i é numa escala diferente dos outros tal que eles não se cancelam.

Diagram illustrating the Simplex method for a degenerate system, showing the initial tableau and the first iteration.

Initial Tableau (Início):

$$\begin{array}{c|c}
 z = 4 & +2x_1 \quad -x_2 \\
 \hline
 w_1 = 1/2 + \epsilon_1 & -x_2 \\
 w_2 = 0 + \epsilon_2 & -2x_1 + 4x_2 \\
 w_3 = 0 + \epsilon_3 & +x_1 - 3x_2
 \end{array}$$

Handwritten notes and transformations:

- $l_1 = (1/2 \ 1 \ 0 \ 0)$ (circled in green)
- $l_2 = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$ (circled in green)
- $l_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$ (circled in green)
- $l_1 = x$ (circled in orange)
- $l_2 = (0 \ 0 \ 1/2 \ 0)$ (circled in green)
- $l_3 = x$ (circled in orange)
- $l_1 - w_2: \lim. 0$
- $\lim: \epsilon/2$
- $x_1: 0 \rightarrow \epsilon/2$
- $z: 4 \rightarrow 4 + \epsilon_2$

- Os ϵ participam na **determinação do limite!**
- Mas nunca como "**variáveis entrantes**".
- O "coeficiente" agora é um vetor $c = (\bar{b}e_1 \dots e_m)^t$.
- Similarmente o **limite** para $\bar{a}_{ik} > 0$ é um **vetor**.
- Comparar limites** l, l' : $l < l'$ caso o primeiro coeficiente não-zero de $l - l'$ é < 0 .

Comparar lexicograficamente.

*O método Simplex sempre termina escolhendo as variáveis
saindo usando a regra lexicográfica.*

- Perturbações durante a aplicação do método

posto m
linhas lin. indep.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & \\ & \epsilon_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \epsilon_m \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_{11}\epsilon_1 & e_{12}\epsilon_2 & \dots & e_{1m}\epsilon_m \\ e_{21}\epsilon_1 & e_{22}\epsilon_2 & \dots & e_{2m}\epsilon_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{m1}\epsilon_1 & e_{m2}\epsilon_2 & \dots & e_{mm}\epsilon_m \end{pmatrix}$$

Certo, linhas
prós

- Nenhuma perturbação é 0.

posto m
 $\Rightarrow$ nenhuma linha é 0
não tem linhas
iguais

$$\begin{array}{rcl}
 z & = & 4 \\
 \hline
 w_1 & = & 1/2 + \epsilon_1 \\
 w_2 & = & \\
 w_3 & = &
 \end{array}
 \begin{array}{rcl}
 +2x_1 & - & x_2 \\
 -2x_1 & + & 4x_2 \\
 +x_1 & - & 3x_2 \\
 \hline
 \epsilon_2 + \epsilon_3 & - & 20x_1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 l_2(0 \ 0 \ 1 \ 0)/2 = (0 \ 0 \ 1/2 \ 0) \\
 l_3(0 \ 0 \ 0 \ 1)/20 = (0 \ 0 \ 0 \ 1/20) \\
 \hline
 (0 \ 0 \ 1/2 \ 1) \\
 (0 \ 0 \ 1/2 \ 1) \\
 \hline
 (0 \ 0 \ 1/2 \ 1)
 \end{array}$$

$x_1 = w_3$
 $l_2 < l_3$
 $l_3 < l_2$
 $(0 \ 0 \ 1/2 \ 1)$
 < 0

- Pivô x_1-w_2 .

z	$= 4$	$+ \epsilon_2$	$-w_2$	$+ 3x_2$
w_1	$= 1/2$	$+ \epsilon_1$		$-x_2$
x_1		$1/2\epsilon_2$	$-1/2w_2$	$+2x_2$
w_3		$1/2\epsilon_2$	$-1/2w_2$	$-x_2$

- Pivô x_2-w_3 .

• PIVO x_2-w_3 .

z	$= 4$	$+5/2\epsilon_2$	$+3\epsilon_3$	$-5/2w_2$	$-3w_3$
w_1	$= 1/2$	$+\epsilon_1$	$-1/2\epsilon_2$	$-\epsilon_3$	$+1/2w_2$
x_1	$=$		$3/2\epsilon_2$	$+2\epsilon_3$	$-3/2w_2$
x_2	$=$		$1/2\epsilon_2$	$+\epsilon_3$	$-1/2w_2$

Candidato p/ entrar: coeficiente positivo.

Candidato p/ sair: menor limite.

Escolhe como variável entrante e saiete sempre a variável com o menor índice (caso tiver mais que um candidato).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+m} \\
 \text{Max cda na} & & & & & & & & \\
 \text{Dente} & b_1 & x_2 & & x_n & w_1 & w_2 & \dots & w_m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & w_1 & w_2 & \dots & w_m & x_1 & x_2 & \dots & x_n
 \end{array}$$

Ordem global das variáveis.

Para qualquer programa linear temos:

- Se não existe solução ótima, o problema é inviável ou ilimitado.
- Se existe uma solução viável, existe uma solução básica viável.
- Se existe uma solução ótima, existe uma solução ótima básica.

- No máximo $\binom{n+m}{n}$ bases.
- Uma regra de pivoteamento polinomial é uma questão aberta
- Melhor algoritmo: $O((n^3/\log n)L)$ (Anstreicher 1999) para inteiros com L bits em aritmética em $O(1)$.
- Empiricamente o método Simplex precisa $O((m+n)^{1.7})$ pivôs (Vanderbei 2014).

prob + var.