



DUALIDADE 1: INTRODUÇÃO, TEOREMAS FUNDAMENTAIS.

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-05-25
seg>

1. Introdução
2. Encontrar limites

- **Dualidade**: Cada programa linear (chamada de **primal**) possui um **programa linear correspondente**, chamado de **dual**.
- A dualidade tem várias aplicações como
 - ▷ • Estimar a qualidade de soluções e a **convergência** do método Simplex.
 - **Certificar** a otimalidade de um programa linear.
 - Analisar a **sensibilidade** e re-otimizar sistemas.
 - Resolver programas lineares mais eficiente com o **Método Simplex dual**.
- O programa linear dual possui uma **interpretação relevante**.

- Considere o programa linear

Lim. inf.
Lim. sup.?

maximiza $z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$ $\leq 10x_1 + x_2 + (1)x_3 \leq 10$

sujeito a (1) $x_1 + 4x_2 \leq 1$ (2) $10x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10$

(3) $3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

*Quais mult.?
Método gráfico?*

$z^* \leq 10$
 $z^* \leq 12$ ✓
 $z^* \leq 5$?

- Cada **solução viável** fornece um limite inferior para o valor máximo.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow z = 4$$

$$z^* \geq 0$$

$$z^* \geq 4$$

- Qual a qualidade da solução atual?
- Não sabemos, sem limite superior.

- Como obter um limite superior?

Observe: $z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10$

- Podemos construir uma **combinação linear das desigualdades**, tal que o coeficiente de cada x_j ultrapasse o coeficiente da função objetivo.
- Nosso exemplo:

$$\begin{aligned}(x_1 + 4x_2) + 3(3x_1 - x_2 + x_3) &\leq 1 + 3 \cdot 3 = 10 \\ \iff 10x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 10\end{aligned}$$

- **Qual seria o menor limite superior** que esse método fornece?

Primal (P)

$$\max z = 4x_1 + x_2 + 3x_3,$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + 4x_2 \leq 1, \quad | \cdot y_1 \geq 0$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, \quad | \cdot y_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

multiplicadores

$$z = \underbrace{4}_{(1)} x_1 + \underbrace{1}_{(2)} x_2 + \underbrace{3}_{(3)} x_3 \leq \underbrace{y_1 + 3y_2}_{\text{limite}}$$

Dual (D)

$$\min. y_1 + 3y_2,$$

$$\text{s.a.} \quad y_1 + 3y_2 \geq 4,$$

$$4y_1 - y_2 \geq 1,$$

$$y_2 \geq 3,$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

3 restrições

(1)

(2)

(3)

Quais mult.
dão limite?

variáveis duais
(mult.)

- Sejam $y_1, \dots, y_n$ os coeficientes de cada linha. Observação: Eles devem ser ≥ 0 para manter a direção das desigualdades.
- Então queremos

$(P) \quad \max \sum_{j \in [n]} c_j x_j$
 s.a. $\sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in [m]$
 $x_j \geq 0, \quad j \in [n].$
 $\forall j \in [n],$

$(D) \quad \text{minimiza} \sum_{i \in [m]} b_i y_i$
 sujeito a $\sum_{i \in [m]} a_{ij} y_i \geq c_j,$
 $y_i \geq 0.$

- Isto é o *problema dual* com *variáveis duais* ou *multiplicadores duais* y_i .

$$A^t y \geq c$$

- Em notação matricial

(P) **maximiza** $c^t x$,
sujeito a $Ax \leq b$,
 $x \geq 0$.

minimiza $b^t y$,
sujeito a $y^t A \geq c^t$,
 $y \geq 0$.

- O primeiro se chama *primal* e o segundo *dual*.
- Eles usam os mesmos parâmetros c_j, a_{ij}, b_i .

$$\begin{matrix} \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ (P) & \rightleftharpoons & (D) \end{matrix}$$

- **Observação:** O dual do dual é o primal.
- Forma normal do dual:

$$\begin{aligned} &\text{--maximiza} && -b^t y, \\ &\text{sujeito a} && -y^t A \leq -c^t, \\ &&& y \geq 0. \end{aligned} =$$

$$\begin{aligned} &\text{--maximiza} && -b^t y, \\ &\text{sujeito a} && (-A^t)y \leq -c, \\ &&& y \geq 0. \end{aligned}$$

- Dual do dual

$$\begin{aligned} &\text{--minimiza} && -c^t z, \\ &\text{sujeito a} && z^t (-A^t) \geq -b^t, \\ &&& z \geq 0. \end{aligned} =$$

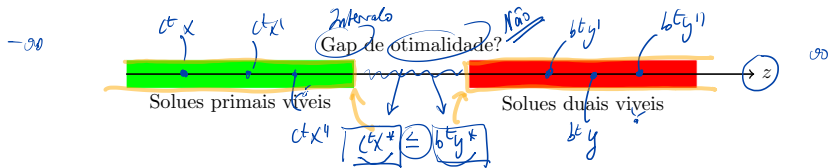
$$\begin{aligned} &\text{maximiza} && c^t z, \\ &\text{sujeito a} && Az \leq b \\ &&& z \geq 0. \end{aligned}$$

$$= (P)$$

Weak duality

Se $x_1, \dots, x_n$ é uma solução viável do sistema primal, e $y_1, \dots, y_m$ uma solução viável do sistema dual, então

$$c^T x \leq b^T y.$$



Prova

$$c^T x \leq (y^T A) x = y^T (Ax) \leq y^T b.$$

Strong duality

Se $x_1^*, \dots, x_n^*$ é uma solução ótima do sistema primal, existe uma solução ótima $y_1^*, \dots, y_m^*$ do sistema dual com

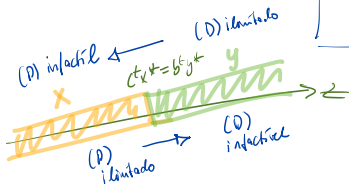
$$\sum_{i \in [n]} c_i x_i^* = \sum_{j \in [m]} b_j y_j^*.$$

$$c^T x^* = b^T y^*$$

1) Quero saber o valor ótimo de um PL (P)

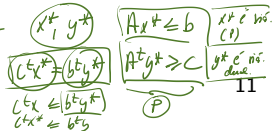
$\Rightarrow$ agora posso também resolver o dual. (D)

2) x^* e y^* é um certificado de otimalidade que pode ser testado em tempo polinomial



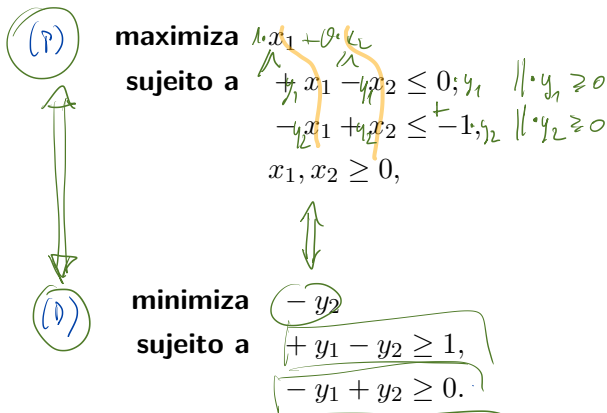
$P \neq NP$

$NP \cap co-NP \rightarrow P$



- Com o teorema da dualidade forte, temos quatro possibilidades

	Sistema primal	Sistema dual	Intervalo
Dual. forte	Ótimo	$\Rightarrow$ Ótimo	Sem ✓
Dual. fraca	Ilimitado	$\Rightarrow$ Inviável	"Sem"
	Inviável	$\Leftarrow$ Ilimitado	"Sem"
	Inviável	Inviável	Infinito ? sin



Primal	Dual		
	<u>Inviável</u>	<u>Ótimo</u>	Ilimitado
<u>Inviável</u>	✓	✗ <i>D.f.</i>	✓ <i>D. fraca</i>
<u>Ótimo</u>	✗ <i>D. fraca</i>	✓ <i>D.f.</i>	✗
<u>Ilimitado</u>	✓	✗	✗ <i>D. fraca</i>

2

ENCONTRAR LIMITES
(Branco)

DUALIDADE 1: INTRODUÇÃO,
TEOREMAS FUNDAMENTAIS.

- Substituindo desigualdades..

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x, \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x, \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

- ... padronizar novamente, e formar o dual:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x, \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b, \\ & -Ax \leq -b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimiza} & b^t y^+ - b^t y^-, \\ \text{sujeito a} & y^{+t} A - y^{-t} A \geq c, \\ & y^+ \geq 0, y^- \geq 0, \\ & y^+ = (y_1^+, \dots, y_m^+)^t, \\ & y^- = (y_1^-, \dots, y_m^-)^t. \end{array}$$

- Equivalente, usando variáveis irrestritas $y = y^+ - y^-$

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & b^t y \\ \text{sujeito a} & y^t A \geq c, \\ & y^t \leq 0.\end{array}$$

Primal (max)	Dual (min)
Igualdade	Variável dual livre
Desigualdade ($\leq$)	Variável dual não-negativa
Desigualdade ($\geq$)	Variável dual não-positiva
Variável primal livre	Igualdade
Variável primal não-negativa	Desigualdade ($\geq$)
Variável primal não-positiva	Desigualdade ($\leq$)

2

ENCONTRAR LIMITES
(Branco)

DUALIDADE 1: INTRODUÇÃO,
TEOREMAS FUNDAMENTAIS.

Os vetores x^, y^* são soluções ótimas do sistema primal e dual, respectivamente, se e somente se*

$$y^{*t}(b - Ax^*) = 0 \quad (2)$$

$$(y^{*t}A - c^t)x^* = 0 \quad (3)$$

As igualdades 2 e 3 são ainda válidas em cada componente, porque tanto as soluções ótimas x^*, y^* quanto as folgas primas e duais $b - Ax$ e $y^{*t}A - c^t$ sempre são positivos.

$$x_i > 0 \Rightarrow \sum_{j \in [m]} y_j a_{ji} = c_i \quad (4)$$

$$\sum_{j \in [m]} y_j a_{ji} > c_i \Rightarrow x_i = 0 \quad (5)$$

$$y_j > 0 \Rightarrow b_j = \sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i \quad (6)$$

$$b_j > \sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i \Rightarrow y_j = 0 \quad (7)$$

2

ENCONTRAR LIMITES
(Branco)

DUALIDADE 1: INTRODUÇÃO,
TEOREMAS FUNDAMENTAIS.