



DUALIDADE 2

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-05-11

seg>

1. Resumo
2. Forma não padrão
3. Folgas complementares
4. Interpretações

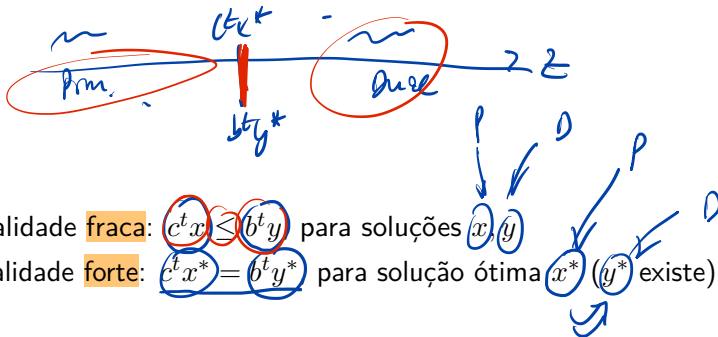
- Cada PL primal possui um PL dual

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximiza} & c^t x, \\
 \text{sujeito a} & Ax \leq b, \\
 & x \geq 0.
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{minimiza} & b^t y, \\
 \text{sujeito a} & y^t A \geq c^t, \\
 & y \geq 0.
 \end{array}$$

F.N.
 (P)

(D)

- O dual do dual é o primal.



- Dualidade **fraca**: $c^t x \leq b^t y$ para soluções (x, y)
- Dualidade **forte**: $c^t x^* = b^t y^*$ para solução ótima (x^*, y^*) existe)

Primal	Dual		
	<u>Inviável</u>	<u>Ótimo</u>	Ilimitado
<u>Inviável</u>	✓ ^{+0:0}	×	✓
<u>Ótimo</u>	×	✓	×
Ilimitado	✓	×	×

- Substituindo desigualdades..

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x, \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

$x \geq 0, x \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^+ - x^-$
 $x^+, x^- \geq 0$

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x, \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

- ... padronizar novamente, e formar o dual:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x, \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} Ax \leq b, \\ -Ax \leq -b, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

F.W.

max. $c^t x$
 s.t. $Ax \leq b$
 $x \geq 0$

$\Rightarrow$ min $b^t y$
 s.t. $y^t A \geq c^t$
 $y \geq 0$

$$\begin{array}{ll} \text{minimiza} & b^t y^+ - b^t y^-, \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} y^{+t} A - y^{-t} A \geq c^t, \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0, \\ y^+ = (y_1^+, \dots, y_m^+)^t, \\ y^- = (y_1^-, \dots, y_m^-)^t. \end{cases} \end{array}$$

$b_1 y_1^+ - b_1 y_1^- \geq y_1^+ - y_1^-$

$$\begin{array}{ll} \max. & c^t x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min. & b^t y \\ \text{s.t.} & y^t A \geq c^t \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$y = (y^+ - y^-)^t$$

$$(P) \quad A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min. & b^t y = [b^+ - b^-]^t (y^+ - y^-) = b^+ y^+ - b^- y^- \\ \text{s.t.} & y^+ y^- \geq 0 \end{aligned}$$

$$[y^+ \quad y^-]^t \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} = y^+ A - y^- A$$

- Equivalente, usando variáveis irrestritas $y = y^+ - y^-$

$$\begin{array}{ll} \max. & c^t x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimiza} & b^t y \\ \text{sujeito a} & y^t A \geq c, \\ & y^t \leq 0. \end{array}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(P)

(D)

$$b^t y = (b_1^t \quad b_2^t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{b_1^t}_{b_1} y_1 + \underbrace{b_2^t}_{b_2} y_2 \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad b^t = (b_1^t \quad b_2^t)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+7 \\ 2+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \end{pmatrix}$$

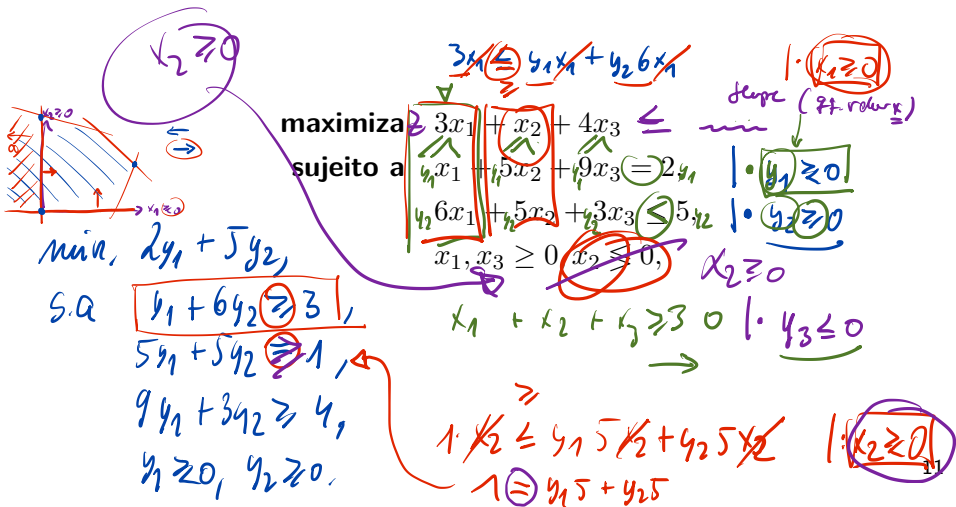
$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad y^t A \\
 A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
 y^t A &= (y_1^t \ y_2^t) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = y_1^t A_1 + y_2^t A_2 \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Primal (max)	Dual (min)
Igualdade ($=$)	Variável dual livre
Desigualdade ($\leq$) F.N.	Variável dual não-negativa
Desigualdade ($\geq$)	Variável dual não-positiva
Variável primal livre	Igualdade
Variável primal não-negativa	Desigualdade ($\geq$) F.N.
Variável primal não-positiva	Desigualdade ($\leq$)

$y \geq 0$

$y \leq 0$

$y \leq 0$



Ex

minimiza $\sum_{a \in A} c_a x_a$

sujeito a

$$\sum_{(u,v) \in A} x_{(u,v)} - \sum_{(v,u) \in A} x_{(v,u)} = b_v, \quad \forall v \in V,$$

$$x_a \geq l_a,$$

$$x_a \leq u_a,$$

$$x_a \geq 0,$$

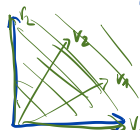
$$\forall a \in A,$$

$$\forall a \in A,$$

$$\forall a \in A,$$

$$y^* \geq 0; \quad b - Ax^* \geq 0$$

$$(D) \quad \max b^t y, \\ \text{s.t. } y^t A \leq c^t \\ y \geq 0$$



P D

Os vetores (x^*, y^*) são soluções ótimas do sistema primal e dual, respectivamente, se e somente se

Folgas duais (ót.)

↓
Solução primal

(P)

$\max c^t x,$

s.t. $Ax \leq b$

$x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{b - Ax \geq 0}_{\text{folga primal}}$$

$$\begin{aligned} y^{*t}(b - Ax^*) &= 0 \\ (y^{*t}A - c^t)x^* &= 0 \end{aligned}$$

↑
folga dual

(1)

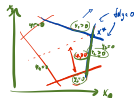
(2)

Solução ótima dual

↓

folgas primais (ót.)

As igualdades 1 e 2 são ainda válidas em cada componente, porque tanto as soluções ótimas x^*, y^* quanto as folgas primas e duais $b - Ax$ e $y^{*t} A - c^t$ sempre são positivos.



$$x_i > 0 \Rightarrow \sum_{j \in [m]} y_j a_{ji} = c_i \quad (3)$$

$$\sum_{j \in [m]} y_j a_{ji} > c_i \Rightarrow x_i = 0 \quad (4)$$

$$y_j^* > 0 \Rightarrow b_j = \sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i^* \quad (5)$$

$$b_j > \sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i^* \Rightarrow y_j = 0 \quad (6)$$

$$y^{*t} (b - Ax^*) = 0$$

$$y^{*t} w = 0$$

$$y_j^* \cdot w_j = 0$$

$$\begin{aligned} y_i^* > 0 &\Rightarrow w_i = 0 \\ w_j > 0 &\Rightarrow y_j^* = 0 \end{aligned}$$

- Problema da dieta: Minimiza custos de uma dieta x que alcance dados VDR mínimos.

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax \geq r, \\ & x \geq 0.\end{array}$$

- onde

$x \in \mathbb{R}^n$ Quantidade do alimento $[g]$

$c \in \mathbb{R}^n$ R\$/alimento $[R\$/g]$

$a_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Nutriente/Alimento $[g/g]$

$r \in \mathbb{R}^m$ Quantidade de nutriente $[g]$.

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & y^t r \\ \text{sujeito a} & y^t A \leq c^t, \\ & y \geq 0.\end{array}$$

- Unidade y : [R\$/g]
- Interpretação:
 - Vender nutrientes puros, por y_i
 - Combinação fica mais barata que alimento correspondente:

$$\sum_{i \in [m]} y_i a_{ij} \leq c_j, \quad \forall j \in [m]$$

- Maximiza o lucro de uma dieta nas VDR

$$\text{maximiza} \quad y^t r$$

Se um sistema possui pelo menos uma solução básica ótima não-degenerada, existe um $\epsilon > 0$ tal que, se $|t_j| \leq \epsilon$ para $j \in [m]$,



$$z = z(A, b, c)$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_j} = y_j^*$$

$$\begin{aligned} & \text{maximiza } c^t x, \\ & \text{sujeito a } Ax \leq b + t, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \text{Sol. } x^* \\ & \text{valor } z^* \\ & \text{Sol. } y^* \\ & \text{valor } z^*. \end{aligned}$$

tem uma solução ótima com valor

$$z = z^* + y^{*t} t$$

representa a variação da f.o. por unidade de variação dos lados dir.

(com z^* o valor ótimo do primal, é y^* a solução ótima do dual).

maximiza $0.2c + 0.5c$ (7)

sujeito a $c + 1.5s \leq 150,$ (8)

$50c + 50s \leq 6000,$ (9)

$c \leq 80,$ (10)

$s \leq 70,$ (11)

$c, s \geq 0.$ (12)

 4_1 4_2 7_3 4_4

