



DUALIDADE 4

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-05-11

seg>

1. Resumo
2. Análise de sensibilidade

- Ao invés de pivotar no dual e manter o primal correspondente: pivotar no primal **com novas regras**

① • Dualmente viável: $\bar{c}_j \leq 0$ para $j \in \mathcal{N}$.

② • Dualmente ótimo: $\forall i \in \mathcal{B} : \bar{b}_i \geq 0$.

c.c.: $\exists i: \bar{b}_i < 0$

③ • Variável sainte: $i = \operatorname{argmin}_{i \in \mathcal{B}} \bar{b}_i$

④ • Variável entrante (Dantzig): $j = \operatorname{argmax}_{j \in \mathcal{N}} \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{c}_j}$

Pivo caso limite positivo

$$z = \bar{z} + \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2$$

sample $\triangleright x_3 = \bar{b}_3 - \bar{a}_{31} x_1 - \bar{a}_{32} x_2$

$$\begin{array}{l} -\bar{c}_1 \geq 0 \\ -\bar{a}_{31} \geq 0 \\ +\bar{a}_{31} \leq 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \textcircled{1} \operatorname{argmin}_{j \in \mathcal{N}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \\ \bar{a}_{ij} < 0 \end{array} \right. = \operatorname{argmax}_{j \in \mathcal{N}} \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{c}_j} \begin{array}{l} \textcircled{2} \bar{a}_{ij} \geq 0 \\ \bar{c}_j \leq 0 \end{array}$$

- Na solução da programas lineares os parâmetros são fixos.
- Qual o efeito de uma perturbação

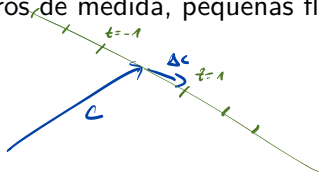
$$\hat{c} = c + \Delta c; \quad \hat{b} = b + \Delta b; \quad [\hat{A} = A + \Delta A]$$

ou de uma perturbação paramétrica com $t \in \mathbb{R}$

$$\hat{c} = c + t\Delta c; \quad \hat{b} = b + t\Delta b; \quad [A := A + t\Delta A?]$$

Novo L antipl. var.

(Imagina erros de medida, pequenas flutuações, etc.)



- Para estudar isso é necessário particionar os dados do PL com variáveis de folga $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

- Assume: índices das variáveis básicas B , das nulas N
- Separa de acordo

$$n=3 \quad m=2$$

$$x_1, \dots, x_5$$

$$A \cdot x = b$$

$$[B \ N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

colunas das var. básicas

colunas var. nulas

$$A = (B \ N); \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$B = m \begin{bmatrix} & m \\ & x_1 \ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \\ x_5 & x_5 \end{array} \right) N$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} & x_2 \ x_4 \ x_5 \end{bmatrix}$$

Disc.

$$z = (\bar{z}) + (\bar{c})^t x_N$$

$$x_B = (\bar{b}) - (\bar{A}) x_N$$



- Portanto, vamos identificar

$$\bar{z} = c_B^t B^{-1} b;$$

$$\bar{b} = B^{-1} b;$$

$$\bar{c} = -((B^{-1} N)^t (\bar{c}_B) - (\bar{c}_N)) = -y_N$$

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) = B^{-1} N$$

- Consequência para a variação de dados?

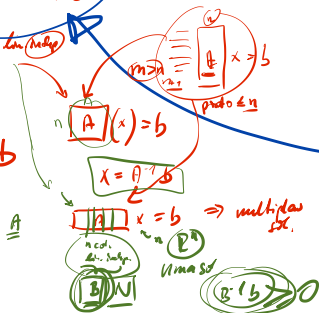
Variação	Reação			
	$\bar{z}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{A}$
A	✓	✓	✓	✓
b	✓	×	✓	×
c	✓	✓	×	×

$$n=2$$

max. $C^T x$
 s.t. $Ax = b$
 $x \geq 0$

A linha da (obj)

$$Ax = b$$



maximiza $25p + 30c$
 sujeito a $7p + 10c \leq 56000$,
 $p \leq 6000$,
 $c \leq 4000$,
 $p, c \geq 0$.

$$x = \begin{pmatrix} p \\ c \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p \quad c \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3$

$$b = \begin{pmatrix} 56 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 1000$$

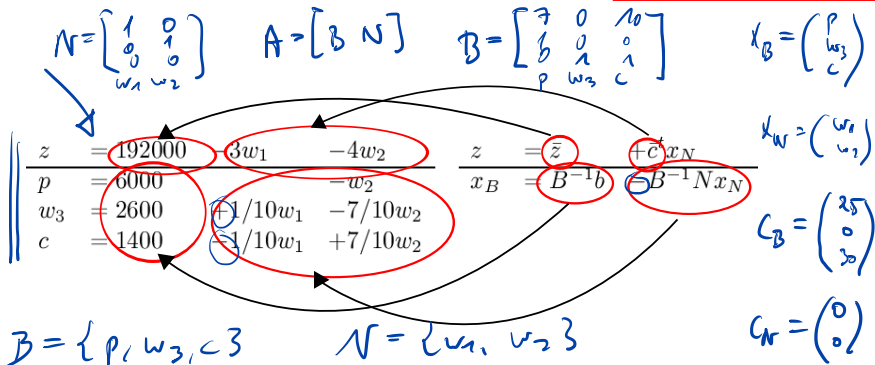
$$C = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + w_1 = -1 \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + w_2 = 0$$

$$\sqrt{x_1, w_1, w_2 \geq 0} \quad 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



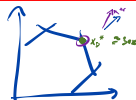
- Dado o dicionário ótimo: base conhecida, podemos particionar; os valores já sabemos.
- Dado um base qualquer: também é possível calcular os valores.

- Base $\mathcal{B} = \{p, w_3, c\}$, variáveis não-básicas $\mathcal{N} = \{w_1, w_2\}$.

$$c = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; c_B = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}; c_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} p \\ w_3 \\ c \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}; x_B = \begin{pmatrix} p \\ w_3 \\ c \end{pmatrix}; x_N = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix};$$

$$\bar{z} = 192000; \bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}; y_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/10 & 7/10 \\ 1/10 & -7/10 \end{pmatrix}; \bar{b} = B^{-1}b = 100 \begin{pmatrix} 60 \\ 26 \\ 14 \end{pmatrix}$$



- Seleciona Δc seja $\hat{c} = c + t\Delta c$
- Solução básica $x_B = B^{-1}b$ e matriz $(\hat{A})$ não variam (base fixa!)
- Nova solução dual

$$\hat{c} = c + t\Delta c \quad \hat{y}_N = (B^{-1}N)^t \hat{c}_B - \hat{c}_N = (B^{-1}N)^t (c_B + t\Delta c_B) - (c_N + t\Delta c_N)$$

$$\hat{c}_B = c_B + t\Delta c_B \quad \hat{y}_N + t\Delta y_N$$

$$\hat{c}_N = c_N + t\Delta c_N \quad \text{onde } \Delta y_N = \underline{(B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N}$$

- Novo valor da função objetivo

$$\hat{z} = \hat{c}_B^t x_B = \bar{z} + t\Delta z$$

$$\text{com } \Delta z = \Delta c_B^t x_B.$$

$$\hat{c} = -\hat{y}$$

$\downarrow$ $\mathbb{R}^n$ $\downarrow$ $\mathbb{R}^m$

$$\bar{c} = -y_N \leq 0$$

Condição para otimalidade:

- $x_B \geq 0$: sempre satisfeito ✓
- $\hat{y}_N \geq 0$: $\iff y_N + t\Delta y_N \geq 0 \rightarrow$ condições para t .

Para uma solução não mais ótima:

- Reotimizar com método Simplex primal

$$\rightarrow x_b \geq 0$$

$$\Delta C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ w_3 \\ c \\ w_1 \\ w_2 \end{matrix}$$

$$\Delta C_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta C_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_N &= (B^{-1}N)^t \Delta C_B - \Delta C_N \\ &= (B^{-1}N)^t \Delta C_B \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 1/10 \\ 1 & 7/10 & -4/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta z = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot 100 = 6000.$$

Otimidade:

$$y_N \geq 0$$

$$\hat{z} = z + t \Delta z$$

$$= 192k + 6kt$$

$$\hat{y}_N = y_N + t \Delta y_N \geq 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$3 + 0 \cdot t \geq 0 \quad \checkmark$$

$$4 + t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -4$$

$\Rightarrow t \in [-4, 00]$ nova solução ainda é ótima.

$C_P \in [21, 00]$ ainda é ótima.

$$C_P = 20?$$

$$z = 162000 - 3u_1 + u_2$$

← cond. var. ótima

$p = 600$

$u_3 = 200$

$C = 1422$

→ pivô + re-otimizar

- Selecciona Δb , seja $\hat{b} = b + t\Delta b$
- Solução dual y_N e matriz A não variam (objetivo fixo!)
- Nova solução primal

$$\begin{aligned} \hat{x}_B &= B^{-1}\hat{b} \\ &= x_B + t\Delta x_B \end{aligned}$$

com $\Delta x_B = B^{-1}\Delta b$

- Novo valor da função objetivo

$$\hat{z} = c_B^t B^{-1} \hat{x}_B = \bar{z} + t\Delta z$$

com $\Delta z = c_B^t B^{-1} \Delta b$.

Condição para otimalidade:

- $\hat{x}_B \geq 0: \iff x_B + t\Delta x_B (\geq 0) \rightarrow \text{condições para } t$
 - $y_N \geq 0$: sempre satisfeito
- | $\rightarrow t \in [\dots]$

Para uma solução não mais ótima:

- Reotimizar com método Simplex dual

A matriz B^{-1} é formada pelas colunas do dicionário final (na forma $\bar{A}x_N + Ix_B = \bar{b}$) que correspondem com as variáveis de folga.

