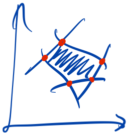
PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Marcus Ritt

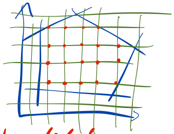
INF 05010 – Otimização combinatória — <*2020-06-17 qua*>

Outline



PI (puro): F.N.

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & c^t x \\
\textbf{sujeito a} \quad & Ax \leq b, \\
& x \in \mathbb{Z}^n_+ \leftarrow \text{restr. integralidade}
\end{aligned}
$$



$x \in \mathbb{Z}^n \longleftrightarrow x \in \mathbb{R}^n_+$ PL

$x \in \mathbb{Q}^n$

- Complexidade: NP-difícil
- Algoritmos de solução: fundamentalmente diferentes

Para indicadores $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}$ = {0, 1}

- No máximo k: $\sum_{i \in [n]} x_i \boxed{\leq k}$
- Exatamente k: $\sum_{i \in [n]} x_i \boxed{= k}$
- Pelo menos k $\sum_{i \in [n]} x_i \boxed{\geq k}$

de itens selecionados

- Dado n cidades: instala no máximo k fábricas
- Minimiza custo total de instalação; a instalação na cidade $j \in [n]$ custa f_j.

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{inst. fábrica na cid. } j, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

custo total

$$\boxed{\begin{aligned} \min \ & \sum_{j \in [n]} f_j x_j \\ \text{s.a} \ & \sum_{j \in [n]} x_j \le k, \\ & x_j \in \{0,1\}, \ \forall j \in [n]. \end{aligned}}$$

$\geq$

→ sol. ótima. $x_j = 0$ custo $\underline{0}$.

Formulação: Restrições lógicas

Para variáveis Booleanas $x, y \in \mathbb{B}$ $= \{0, 1\}$

lógico PL/PI

- $x \to y$: $x \leq y$
- $x \vee y$: $x + y \geq 1$
- $x \wedge y$: $x + y = 2$ (trivial!) $x=1,\ y=1$
- $x \oplus y$: $x + y = 1$

$\neg x : 1 - x = 1 \iff x = 0$ (trivial)

$$\begin{aligned} &\max\ c^t x \\ &\text{s.a } Ax \leq b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max\ d^t y \\ &\text{s.a } By \leq b_2 \end{aligned}$$

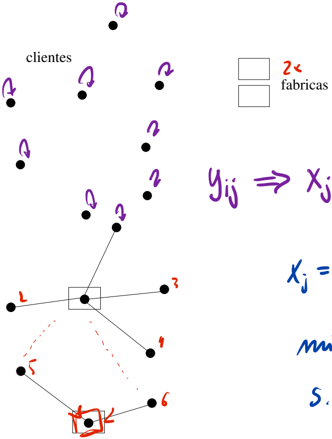
$$\begin{aligned} &\max.\ c^t x + d^t y \\ &\text{s.a } A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq b \end{aligned}$$

$Ax \leq b_1 \,/\, x$

$By \leq b_2 \,/\, y$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: localização de facilidades



$y_{ij} \Rightarrow x_j$

- no máx. k facilidades
- custo p/ constr. fac. cid. j: $f_j \geq 0$
- custo de atender cliente $\forall i \in [n]$, pela fac. instalada em $\forall j \in [n]$: $c_{ij} \geq 0 \Leftarrow c_{ii} = \varepsilon$
- obj: min. custo total

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{constr. fac. na cid. } j, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caso cid } i \text{ é atendida pela fac. na cid } j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\min. \sum_{j \in [n]} f_j x_j + \sum_{i,j \in [n]} c_{ij} y_{ij}$$

no máx. k fac.

$$\text{s.a} \quad \sum_{j \in [n]} x_j \leq k,$$

cada cliente at. ex. 1 vez

$$\sum_{j \in [n]} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in [n]$$

Vínculo!

a) $\boxed{y_{ij} \leq x_j}$ $\quad \forall i \in [n], j \in [n]$ $\quad \Theta(n^2)$

b) $\boxed{\sum_{i \in [n]} y_{ij} \leq n \cdot x_j}$ $\quad \forall j \in [n]$ $\quad \Theta(n)$

$x, y, z \in \{0, 1\}$

Lógica proposicional

$(x \vee y) \wedge (a \wedge b)$

2x $z_1 = x \vee y$
2x $z_2 = a \wedge b$ $\Rightarrow$ Tab.

$z_1 \wedge z_2$ (Altern)

2x $z = z_1 \wedge z_2 \Rightarrow$ Tab.

$z = y \oplus z$

Operação	Formulação linear
$x = y \wedge z$	$x \leq (y+z)/2, x \geq y+z-1$
$x = y \vee z$	$x \geq (y+z)/2, x \leq y+z$
$x = \neg y$	$x = 1-y$
$z = x \rightarrow y$	$z \leq 1-x+y, z \geq (1-x+y)/2$

y	$1-y$	$\neg y = x$
0	1	1
1	0	1

y	z	$y+z-1$	$(y+z)/2$	$x = y \wedge z$
0	0	-1	0	0
0	1	0	1/2	0
1	0	0	1/2	0
1	1	1	1	1

$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

x_1	x_2	x_3
V	F	*

2

- Fórmula em FNC: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in [m]} C_i$
- Cláusulas: $C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$. $i \in [m]$
- Objetivo: encontrar atribuição $x_i \in \mathbb{B}$ maximizando o número de cláusulas satisfeitas.

$l_{ij} = \begin{cases} x_k \\ \neg x_k \end{cases}$

Exemplo: Max-3-SAT

Lógica

Var. $x_1, \ldots, x_n$

Literais $l_{ij} = \begin{cases} x_k \\ \neg x_k \end{cases}$

Cláusulas $C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in [n]} C_i \\ \text{s.a.} & \cancel{(1)-(4)}, \\ & (5), \\ & x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}. \end{array}}$$

(6) $\boxed{C_i \leq z_i + l_{i3} \leq l_{i1} + l_{i2} + l_{i3}}$

PI

Var. $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$

Var. aux. $l_{ij} = \begin{cases} x_k \\ 1 - x_k \end{cases}$ (5)

Var. aux $C_i \in \{0,1\}$

$C_i = z_i \vee l_{i3}$

$z_i = l_{i1} \vee l_{i2}$

$\cancel{C_i \geq (z_i + l_{i3})/2}$ (1)

$C_i \leq z_i + l_{i3}$ (2)

$\cancel{z_i \geq (l_{i1} + l_{i2})/2}$ (3)

$z_i \leq l_{i1} + l_{i2}$ (4)

Ex Instância

$$\textbf{maximiza} \sum_{i \in [m]} c_i$$

sujeito a $c_i \le l_{i1} + l_{i2} + l_{i3}$, $\forall i \in [m]$

$l_{ij} = x_i$, caso $l_{ij} = x_i$,

$l_{ij} = 1 - x_i$, caso $l_{ij} \cancel{\ne x_i} = \neg x_i$

$c_i \in \mathbb{B}, x_i \in \mathbb{B}, l_{ij} \in \mathbb{B}.$

$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee x_2 \vee \neg x_1)$

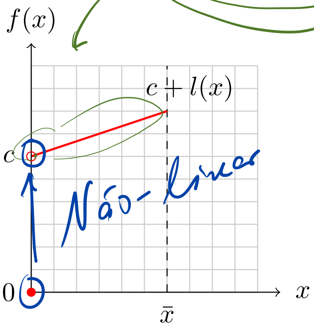
$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & c_1 + c_2 \\ \text{s.a.} & c_1 \le x_1 + x_2 + 1 - x_3 \\ & c_2 \le x_4 + x_2 + 1 - x_1 \end{array}}$$

- Minimiza custos com "entrada" fixa c da forma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{caso } x = 0 \\ c + l(x) & \text{caso } 0 < x \le \bar{x} \end{cases}$$

$l(x) = cx\ [+d]$

lim. sup.



$$y = \begin{cases} 1, & \text{produzir ✓} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min.\ & cy + l(x) \quad = f(x) \\ \text{s.a}\ & x \le \bar{x} \cdot y \\ & x \ge 0,\ y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Aplica uma das duas restrições $f_1 \leq f_2$, $g_1 \leq g_2$
- Solução com "M grande"

$$
\begin{aligned}
&f_1 \leq f_2 + Mx,\\
&g_1 \leq g_2 + M(1-x),\\
&x \in \mathbb{B}.
\end{aligned}
$$