INSTITUTO
DE INFORMÁTICA
UFRGS

TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 1

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — *<2020-06-17 qua>*

1. Técnicas de solução

2. Problemas com solução eficiente

3. Sistema de equações lineares com solução inteira

4. Critérios adicionais para matrizes TU

- PI é NP-difícil $\rightarrow$ novas técnicas
- Relaxação linear é central para todos

integralidade

$$\text{PI: } \max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$$ $\in$ NP-dif.

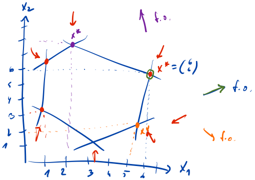
$$\text{PL: } \max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+\}$$ $\in$ P $\rightarrow$ Simplex

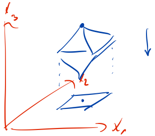
Reais

Três técnias essenciais:

1. Condições que garantam que PL é ótimo.
2. Método de planos de corte.
3. Método Branch and Bound.

LP com soluções inteiras





$\in \mathbb{Z}^n$

- Com base B temos a solução $x = (x_B\ x_N)^t = (B^{-1}b, 0)^t$.
- Logo: garante para *todas bases* B que $\boxed{B^{-1}b \in \mathbb{Z}^m.}$

$\mathbb{Z}$

PL resolve PI, caso tem soluções inteiras.

$\boxed{B}x_B = \boxed{b}$ poss. sol. inteiras

básica; $\det(B) \neq 0$.

$A = [B \quad N]$

Teorema *(Cramer):*
A solução de $Ax = b$ *é* $x_i = \det(A_i)/\det(A)$. $\in \mathbb{Z}$ $\forall i$

(A_i é A onde a i-ésima coluna foi substituída por b.)

$\in \mathbb{R}^{n \times n}$

$x_i \in \mathbb{Z}$? $\det(A_i)/\det(A) \in \mathbb{Z}$

Coeficientes inteiros:

$\boxed{\det(A_i)} \in \mathbb{Z}$
$\boxed{\det(A)} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\det(A) \mid \det(A_i)$

2 4

$-1, 1 \mid \mathbb{Z}$

1b Suproblema: Condições para Ax=b ter soluções inteiras.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$. Sistema de eq. lineares.

$Ax = b$ $\det(A) \neq 0$.

$\Leftrightarrow x = A^{-1}b \in \mathbb{Z}^n$ $\Rightarrow A^{-1}$ existe.

Aplicação a $B^{-1}b$:

B matriz básica

1. $\det(B_i)$ inteiro. B e b tem coeficientes inteiros.
2. $\det(B) \in \{-1, 1\}$. (Simplifição)

Para item 1:

Regra de Laplace:
A determinante de uma matriz pela regra de Laplace é

$$\det(A) = \sum_{i\in[n]} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j\in[n]} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

2

com $j \in [n]$ arbitrário para a primeira variante, e $i \in [n]$ arbitrário para a segunda, e com A_{ij} a submatriz sem linha i e coluna j.

Condição é suficiente, não necessária.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tem a solução inteira $(x_1\ x_2) = (1\ 0)$, mesmo que $\det(A) = -2$.

$\cancel{A\in\mathbb{R}^{m\times n}}$

$A\in\mathbb{Z}^{m\times n}$

$b\in\mathbb{Z}^{m}$

Aplicação a $Ax = b$ (agora $\cancel{\$A\in\mathbb{R}^{\text{mÖ n}}}$):

- Todo sistema $B^{-1}b$ satisfaz as condições
- $\rightarrow$ Toda submatriz quadrada não-singular de A possui determinante -1 ou 1.

Submatrizes não precisam ser contíguas.

Ex: $\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix}$

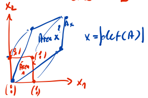
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$(a)\ (b)\ (c)$
$(d)\ (e)\ (f)$
$(g)\ (h)\ (i)$

$\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix}$

$\det((c)) = c \in \{0,-1,1\}$
$\Rightarrow$ coeficientes $\{0,-1,1\}$

Significado det?
A: transformação linear $\mathbb{R}^2$



Definição:
Uma matriz quadrada inteira $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *unimodular* se $|\det(A)| = 1$. Uma matriz arbitrária A é *totalmente unimodular* (TU) se cada submatriz quadrada não-singular A' de A é modular, i.e. $\det(A') \in \{0, 1, -1\}$.

uni

Obs: caso A é TU todos coeficientes tem valor 0, -1 ou 1.

Caso A é TU o PL correspondente sempre possui sol. inteiras.

$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ PL: $\max\{c^t x \mid Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n\}$

$$1\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} =$$

Quais matrizes são totalmente unimodulares?

$$= 1\cdot 1 - 1(-1) = \underline{2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}_1$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}_{-1} \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_1$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}_{-1} \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}_{-1} \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}_1$$

~~TU~~

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; \quad A \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

det 2 det 2

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}+1 & 1 & 1 & 0\\ +1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

A é TU $\Leftrightarrow$ A' é TU.

SSE

Proposição: ~~Se~~ A é TU ~~então~~

$$\overset{TU}{A}x = b$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{[A\ I]}_{TU} x = b$$

1. A^t é TU.
2. $(A\ I)$ com matriz de identidade I é TU.
3. Uma matriz B que é uma permutação das linhas ou colunas de A é TU.
4. Multiplicando uma linha ou coluna por -1 produz uma matriz TU.

PL ⇒ TU crit. suficiente
¬ PL ⇒ ¬TU mas ñ necessário

Proposição (Partição de linhas): Uma matriz A é totalmente unimodular caso

Restringe!

1. $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$, Todo coeficiente é 0,-1, ou 1.
2. cada coluna contém no máximo dois coeficientes não-nulos, e
3. existe uma partição de linhas $M_1 \dot{\cup} M_2 = [1, m]$ tal que cada coluna *com dois coeficientes não-nulos* satisfaz

parte 1 parte 2

$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} = \sum_{i \in M_2} a_{ij}$$

$O(2^m)$

Observação

O critério de partição da linhas é suficiente, mas não necessário. A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

por exemplo, é totalmente unimodular, mas o critério não se aplica.

Exemplo

A matriz

$M_1 = \emptyset$

$$
\begin{array}{c}
 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{cccc} 0=0\checkmark & 0=0\checkmark & (1) & 0=0\checkmark \end{array}
\end{array}
$$

1) $a_{ij} \in \{-1, 1, 0\}$
2) # col. ñ nulos

claramente satisfaz os critérios i) e ii) e todas partições possíveis das suas $m = 3$ linhas são

$m = \{1, 2, 3\}$

$2^m = 2^3 = 8$

$2^m / 2 = 2^{m-1}$

Pelo crit. de PL com M1 vazio e M2={1,2,3} a matriz é TU.

M_1	M_2	M_1	M_2
⇒ $\emptyset$	$\{1,2,3\}$ ✓	$\{1,2\}$	$\{3\}$
~~$\{1\}$~~	~~$\{2,3\}$~~ ✗	$\{1,3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1,3\}$ ✗	$\{2,3\}$	$\{1\}$
$\{3\}$	$\{1,2\}$ ✗	$\{1,2,3\}$	~~$\{1,2,3\}$~~ $\emptyset$

Obviamente, por simetria, temos que considerar somente a primeira metade das possibilidades. Logo em geral um teste exaustivo do critério iii) tem que considerar 2^{m-1} partições.

- Pelo critério ii): somente 6 tipos de colunas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os coeficientes podem ocorrer em qualquer linha.
- Somente os primeiros três tipos precisam satisfazer o critério iii).
- Eles restringem as partições possíveis: as linhas dos coeficientes de uma coluna do tipo $\binom{1}{1}$ ou $\binom{-1}{-1}$ tem que ficar em partes diferentes, aqueles de uma coluna do tipo $\binom{-1}{1}$ no mesmo parte.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Critério i): coeficientes $\in \{-1, 0, 1\}$: Sim.
- Critério ii): cada coluna no máximo dois coeficientes não-nulos: Sim.
- Critério iii): partição M_1,M_2? Sim, escolhe $M_1 = [1, 3], M_2 = \emptyset$.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- TU, mas a regra de partição de linhas não se aplica!