



TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 2

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-06-22

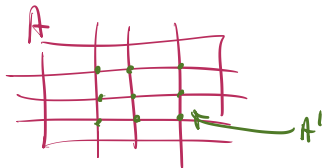
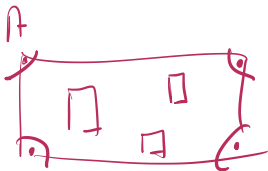
seg>

1. Técnicas de solução
2. Critérios adicionais para matrizes TU
3. Aplicação a problemas

$$\begin{array}{ll}
 P1: \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^n\} & \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array} \mid \text{sol. inteira} \\
 \downarrow \text{rel. lin.} & \uparrow \\
 P2: \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^n\} & \begin{array}{l} x_1 = 0.5 \\ x_2 = 0.7 \end{array} \mid \text{sol. frac.}
 \end{array}$$

Definição

Uma matriz quadrada inteira $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *unimodular* se $|\det(A)| = 1$. Uma matriz arbitrária A é *totalmente unimodular* (TU) se cada submatriz quadrada não-singular A' de A é modular, i.e. $\det(A') \in \{0, 1, -1\}$.



$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Teorema (Hoffman e Kruskal, 1965)

Se a matriz A de um programa linear é **totalmente unimodular** e o vetor b é **inteiro**, **todas soluções básicas são inteiras**. Em particular as regiões **Independente da f.o.**

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \\ &\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\} \\ &\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

possuem pontos extremos inteiros.

Submatriz quadr. $k \times k$ interseção de k linhas e k colunas

It. total de subm. quadradas $\sum_{i \in [k]} \binom{m}{k} \binom{n}{k}$

$\lambda = \min(m, n)$

Proposição (Partição de linhas)Uma matriz A é totalmente unimodular caso

1. $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\},$

2. cada coluna contém no máximo dois coeficientes não-nulos, e

3. existe uma **partição de linhas** $M_1 \dot{\cup} M_2 = [1, m]$ tal que cada coluna **com dois coeficientes não-nulos** satisfaz

$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} = \sum_{i \in M_2} a_{ij}$$

$$2^m$$

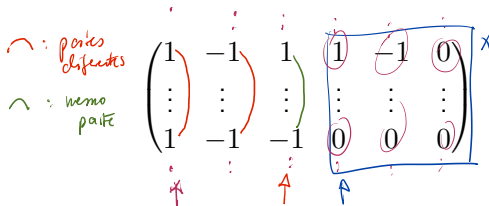
$$\left| \sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} \right| \leq 1$$

todas colunas

$\forall j$

- Pelo critério ii): somente 6 tipos de colunas

P2



- Os coeficientes podem ocorrer em qualquer linha.
- Somente os primeiros três tipos precisam satisfazer o critério iii).
- Eles restringem as partições possíveis: as linhas dos coeficientes de uma coluna do tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tem que ficar em partes diferentes, aqueles de uma coluna do tipo $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no mesmo parte.

Exemplo 1

$$\begin{array}{l}
 M_1 \\
 M_1 \\
 M_2
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

0 2 2

1) $1, 2, 3$ ✓
 2) 2 q.m. ✓
 3)

$$\{1, 2, 3\} = M_1 \dot{\vee} M_2$$

$$M_1 = \{1, 2\}$$

$$M_2 = \{3\}$$

- TU? Sim, pelo crit. R2,

Exemplo 2

$$Pd \Rightarrow TH$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 2 2 3 2

Pd

1) Conf. $\{0, -1, 1\}$? $\checkmark$

2) Coluna $\leq 2 \hat{n} \cdot n$? $\times$

$\Rightarrow$ Pd $\hat{n}$ se aplica.

$\Rightarrow A \hat{n}$ é TH.

- TU? (Sim)
pelo crit. de UC

$$GH \Leftrightarrow TU$$

Teorema (Ghouila-Houri)

Um matriz $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ é TU se para todo subconjunto $R \subseteq [m]$ de linhas existe uma partição $R_1 \cup R_2$ tal que

$$\left| \sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \right| \leq 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Balanceamento geral} \\ (1) \end{array} \right.$$

para todas colunas $j \in [n]$.

$$2^m \cdot 2^m$$

$$PU^+ \Rightarrow TU^+ \Leftrightarrow GH^+$$

$$\uparrow$$

$$UC^+$$

$+$: mostrar TU

$-$: mostrar $\neg TU$

$TU \Rightarrow$ existe uma sub-

matriz quadrada M

$\det(M) \neq -1, 0?$

$GH \Rightarrow$ existir subm. R de $[n]$

t.q. $\#$ existe partição

balanceada.

RL: entre uma f.o. l e t.q. a solução é fracionária.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i A B n i

Bloco de 1 s
uns consecutivos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{B}^{m \times n}$ possui a propriedade de **uns consecutivos** se para cada coluna $(j) \in [n]$, $a_{ij} = 1$ e $a_{i'j} = 1$ com $i < i'$ implica $a_{kj} = 1$ para $k \in [i, i']$.

Uma **aplicação** do critério de Ghouila-Houri:

Proposição

Uma matriz que satisfaz a propriedade de uns consecutivos é totalmente unimodular.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5

$$\left| \sum_{i \in I_1} a_{ij} - \sum_{i \in I_2} a_{ij} \right| \leq 1$$

Prova:

Obs: subconjunto de linhas R de uma matriz UC ainda é UC.

Partição em linhas pares e ímpares.

é NP-completo.

- **Universo** $U = \{u_1, \dots, u_m\}$
- Família de conjuntos $C_1, \dots, C_n \subseteq U$ com pesos $p_1, \dots, p_n$
- Cobertura: uma seleção de conjuntos $S \subseteq [n]$ tal que cada elemento do universo é **coberto**
(i.e. para **todo** $u \in U$ existe um $i \in S$ com $u \in C_i$.)
- Formulação

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{caso } i \text{ sol.} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Dados:

$$A = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caso } i \text{ contém} \\ & \text{elemento } j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

minimiza $\sum_{i \in [n]} p_i x_i$

sujeito a $Ax \geq 1,$

$$x \in \mathbb{B}^n.$$

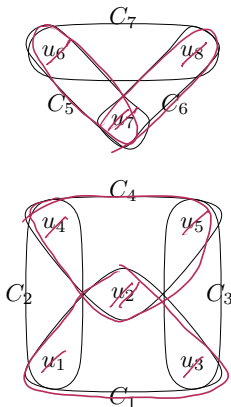
rel. lin. min. ptx
s.t. $Ax \geq 1$
 $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$C_i = \{1, 2, 3\}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & i & & n \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$x \in \{0, 1\}^n$



$$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (7)$$

i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	1	1	1	1	1	1	1

$$C^1 = \{1, 4, 5, 6\} \quad (4)$$

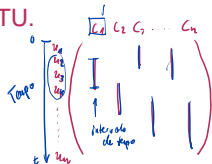
min ptx

s.a. $Ax \leq 1$

$x \in \mathbb{R}_+^n$

$A =$

Limitar para matrizes de uns consecutivos: TU.



$\Rightarrow UC \Rightarrow TU$
 $\Rightarrow$ rel. lin. resolve

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
u_1	1	1	0	0	0	0	0
u_2	1	0	0	1	0	0	0
u_3	1	0	1	0	0	0	0
u_4	0	1	0	1	0	0	0
u_5	0	0	1	1	0	0	0
u_6	0	0	0	0	1	0	1
u_7	0	0	0	0	1	1	0
u_8	0	0	0	0	0	1	1

$A \in TU?$

~~| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |~~

$I = [1, 1, 1]$

não é TU.

$|\det(A')| = 2$

$\Rightarrow \exists$ subm. quadr. A' c/ $\det(A') \notin \{0, -1, 1\}$

$\Rightarrow A$ não é TU.

EP (Dijkstra)

- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ com custos $c : A \rightarrow \mathbb{Z}$ nos arcos.
- Caminho mais curto entre dois nós $s, t \in V$?
- Formulação**

minimiza
$$\sum_{a \in A} c_a x_a$$

sujeito a
$$\sum_{a \in N^+(s)} x_a - \sum_{a \in N^-(s)} x_a = 1,$$

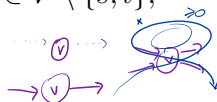
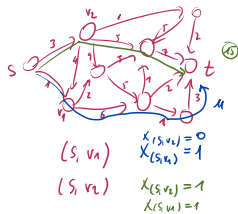
$$x_a = \begin{cases} 1, & \text{arco } a \text{ rel.} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{a \in N^+(v)} x_a - \sum_{a \in N^-(v)} x_a = 0, \\ \sum_{a \in N^+(t)} x_a - \sum_{a \in N^-(t)} x_a = -1, \end{array} \right] \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\},$$

arco a

$$x_a \in \mathbb{B} \Rightarrow x_a \in \mathbb{R}_+$$

$$0 \leq x_a \leq 1 \quad \forall a \in A.$$



$$\begin{matrix} s \\ \vdots \\ t \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & -1 \\ & & 1 & & \\ & \vdots & & & \\ & & -1 & & 1 \\ -1 & \cdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{a_1} \\ \vdots \\ x_{a_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Grafo direcionado $G = (V, A)$
- Arcos de capacidade limitada $l : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$
- Demandas $d : V \rightarrow \mathbb{Z}$ dos vértices
- Custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ por unidade de fluxo nos arcos.
- Qual o fluxo com custo mínimo?

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & \sum_{a \in A} c_a x_a \\ \text{sujeito a} & \sum_{a \in N^+(v)} x_a - \sum_{a \in N^-(v)} x_a = d_v, \quad \forall v \in V \\ & 0 \leq x_a \leq l_a, \quad \forall a \in A.\end{array}$$

- Um grafo $G = (V, E)$ não-direcionado.
- Emparelhamento: $M \subseteq E$
(i.e. um conjunto de arcos, tal que para todos vértices v temos $|N(v) \cap M| \leq 1$.)
- Maximiza $|M|$.
- Formulação

$$\text{maximiza} \quad \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \leq 1, & \forall v \in V, & (3) \\ & x_e \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

3

APLICAÇÃO A PROBLEMAS

Emparelhamentos

TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 2

3

APLICAÇÃO A PROBLEMAS

Emparelhamentos

TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 2