



TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 3

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-06-24
qua>

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \leftarrow \det(A)$$

Matriz TU: todas submatrizes quadradas possuem $\det 0, -1, \text{ ou } 1$.

$$A' : \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Singular} & \text{unimodular} \\ \det(A') = 0 & |\det(A')| = 1 \end{array}$$

1. Aplicação a problemas

2. Desigualdades válidas

3. Chvátal-Gomory

Planos de corte.

- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ com custos $c : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ nos arcos.
- Caminho mais curto entre dois nós $s, t \in V$?
- Formulação**

minimiza

$$\sum_{a \in A} c_a x_a$$

sujeito a

$$\sum_{a \in N^+(s)} x_a - \sum_{a \in N^-(s)} x_a = 1,$$

$$x_a = \begin{cases} 1, & \text{arco } a \text{ faz parte do cam.} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

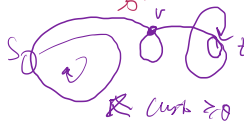
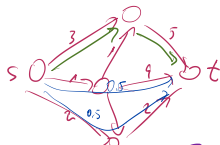
$$\sum_{a \in N^+(v)} x_a - \sum_{a \in N^-(v)} x_a = 0,$$

$$\sum_{a \in N^+(t)} x_a - \sum_{a \in N^-(t)} x_a = -1,$$

$$x_a \in \mathbb{B},$$

$$\mathbb{B} = \{0, 1\},$$

$$\hookrightarrow 0 \leq x_a \leq 1 \quad \text{rel. lin.} \Rightarrow P_2$$



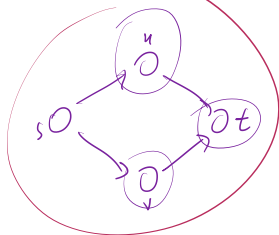
$$\forall v \in V \setminus \{s, t\},$$

TU ou não?

Sim! Sempre.

$$\forall a \in A.$$

Exemplo



$$X_{(s,u)} + X_{(s,v)} = 1$$

$$-X_{(s,u)} + X_{(u,t)} = 0$$

$$-X_{(s,v)} + X_{(v,t)} = 0$$

$$-X_{(u,t)} - X_{(v,t)} = -1$$

Eu?

Sim

Pelo crit. PL

$$M_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(s,u)} \\ X_{(s,v)} \\ X_{(u,t)} \\ X_{(v,t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sum u_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$v \in V \setminus \{s, t\}$$

$$u \rightarrow v$$

$$-x_{(u,v)} + x_{(v,u)}$$

$$\begin{pmatrix} s \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{a_1} \\ \vdots \\ x_{a_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

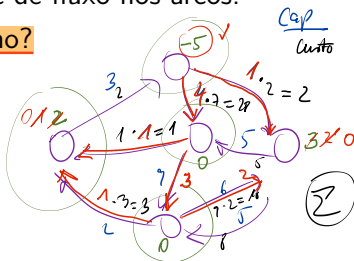
Cada coluna:

sempre um coeficiente 1, um coeficiente -1, resto 0.

Matriz de uma rede (network matrix)

Logo: crit. PL se aplica sempre, com a partição trivial.

- Grafo direcionado $G = (V, A)$
- Arcos de capacidade limitada $l : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$
- Demandas $d : V \rightarrow \mathbb{Z}$ dos vértices
- Custos $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ por unidade de fluxo nos arcos.
- Qual o fluxo com custo mínimo?



$\neg TU \Rightarrow \exists \text{ sol. free?}$

Wro

Part. links
 $PL \Rightarrow TU$
 $TU \not\Rightarrow PL$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TU

$$x_a \in \mathbb{R} \rightarrow x_a \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

~~TU~~

$x_a = \text{fluxo no arco } a$

minimiza

$$\sum_{a \in A} c_a x_a$$

sujeito a

$$\sum_{a \in N^+(v)} x_a - \sum_{a \in N^-(v)} x_a = d_v$$

Fluxo saindo Fluxo entrando

$0 \leq x_a \leq l_a$

Balanceamento de fluxo

$$\forall v \in V$$

$$\forall a \in A$$

$$A = \begin{pmatrix} \text{Rede} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TU \Leftrightarrow (\text{Rede}) \Leftrightarrow PL$$

$d_v=0$: conservação de fluxo
 $d_v>0$: sinks
 $d_v<0$: sources (fontes)

$$x_a \leq l_a \quad \forall a \in A$$

$$\begin{matrix} x_{a_1} & \leq & l_{a_1} \\ x_{a_2} & \leq & l_{a_2} \\ x_{a_3} & \leq & l_{a_3} \\ x_{a_4} & \leq & l_{a_4} \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} \Leftrightarrow [R \ I] \Leftrightarrow R$$

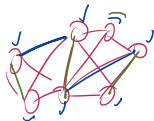
Prop.
 1. $A \text{ TU sse } [A \ I] \text{ TU}$
 2. $A \text{ TU sse } A \in TU$

$N(v)$ conjunto de arestas incidentes em v .

- Um grafo $G = (V, E)$ não-direcionado.
- Emparelhamento: $M \subseteq E$
(i.e. um conjunto de arcos, tal que para todos vértices v temos $|N(v) \cap M| \leq 1$.)
- Maximiza $|M|$.
- Formulação

$|M|=2$

$|M|=3$

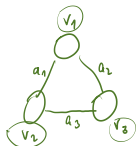


$$\text{maximiza } \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \leq 1, \quad \forall v \in V, \quad (2)$$

$$x_e \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$$

$$\hookrightarrow 0 \leq x_e \leq 1$$



Sol. ótima
inteira: valor 1



Sol. ótima de rel. lin.



Valor 1.5

$$\begin{array}{c}
 x_{a_1} \quad x_{a_2} \quad x_{a_3} \quad \leftarrow [0,1] \\
 \left| \begin{array}{ccc}
 x_{a_1} + x_{a_2} & \leq 1 \\
 x_{a_1} & + x_{a_3} \leq 1 \\
 x_{a_2} + x_{a_3} & \leq 1
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 |v_1 \\
 |v_2 \\
 |v_3
 \end{array} \quad \Leftarrow
 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$|\det(A)| = 2$$

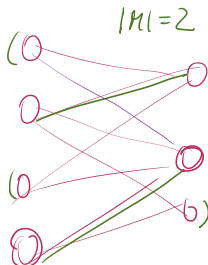
(Existem alg. polinomiais
para este caso.)

Grafos bi-partidos:

$$G = (V, A)$$

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$A \subseteq \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$$



$$V_1 = \{v_1, \dots, v_i\} \quad V_2 = \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

Forma da matrix em geral:

$$\begin{array}{c} V_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \\ \hline V_2 \end{array} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

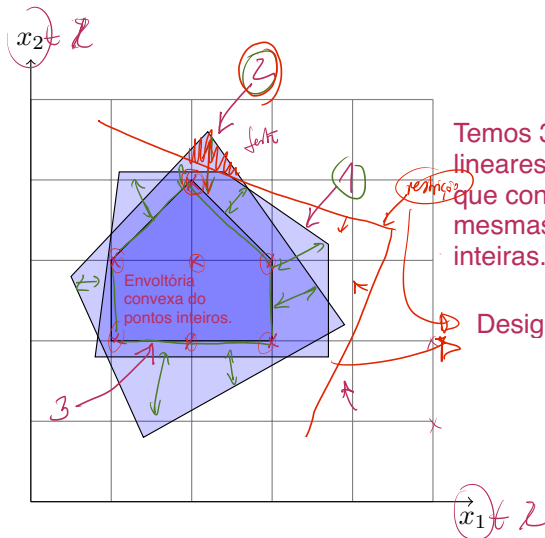
1) $\{0, 1\}^{n \times m}$

2) Ex. 2 coeficientes
1 por coluna.

3) Tem ex. um coef. 1 no
parte superior (V_1) e um
no parte inferior (V_2)

$\Rightarrow$ Crit. part. linhas se aplica
com partição $[1, i] \cup [i+1, n]$

3 é melhor.
1 e 2:
incomparáveis.



$$\pi^t \in \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \pi_0 \in \mathbb{R}$$

Definição

Uma desigualdade $\pi^t x \leq \pi_0$ é **válida** para um conjunto P , se $\forall x \in P : \pi^t x \leq \pi_0$. Como encontrar?

- Técnicas de construção (p.ex. método de Chvátal-Gomory)
- Observar e formalizar características específicas do problema.

The determination of families of strong valid inequalities is more of an art than a formal methodology



$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & \sum_{i \in [n]} v_i x_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i \in [n]} p_i x_i \leq P, \\ & x_i \in \mathbb{B}.\end{array}$$

Exemplo:

$$79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178$$

- Observação: Para um subconjunto $S \subset [1, n]$:
Se $\sum_{i \in S} p_i > P$ então $\sum_S x_i \leq |S| - 1$.
- Exemplos

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \leq 3,$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3.$$

- *Desigualdades de cobertura*

- Escolhe um subconjunto arbitrário de vértices $U \subseteq V$.
- **Observação:** O número de arestas internas é $\leq \lfloor |U|/2 \rfloor$.
- Portanto:

$$\sum_{a \in U^2 \cap A} x_a \leq \lfloor |U|/2 \rfloor \quad (3)$$

é uma desigualdade válida.

- **Fato:** adicionando essas restrições para todo conjunto U de cardinalidade ímpar maior que 1 descreve a envoltória convexa do problema

$$\text{minimiza} \quad \sum_{i,j \in N} c_{ij} x_{ij},$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B}, \quad \forall i, j \in N, \quad (6)$$

+ eliminação de subciclos!

- Considere um subconjunto $S \subset N$ de cidades
- Entre cidades em S não podemos selecionar mais que $|S| - 1$ arestas, senão vai formar um subciclo
- Logo:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, S \neq N. \quad (S_1)$$

- Associa um “potencial” (uma altura) p_i a cada cidade $i \in N$
- Força o sucessor de i na rota ter um potencial pelo menos $p_i + 1$.
- Para permitir um ciclo global, vamos excluir uma cidade fixa $s \in S$ dessa restrição.
- Logo

$$p_i + n(x_{ij} - 1) + 1 \leq p_j \quad \forall i, j, i \neq s, j \neq s \quad (S_2)$$

- Base:

$$P = \{x \mid x \text{ satisfaz } (4), (5), (6)\}$$

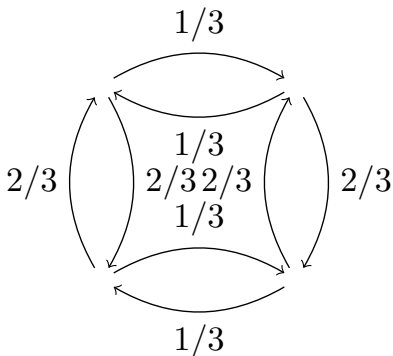
- Formulação 1:

$$P_{S_1} = P \cap \{x \mid x \text{ satisfaz } (S_1)\}$$

- Formulação 2:

$$P_{S_2} = P \cap \{x \mid x \text{ satisfaz } (S_2)\}$$

- É possível demonstrar $P_{S_1} \subset P_{S_2}$.
- Ainda:



- Logo (S_1) domina (S_2) .

Dado uma restrição

$$\sum_{i \in [n]} a_i x_i \leq b$$

também temos, para $u \in \mathbb{R}, u > 0$ as restrições válidas

$$\sum_{i \in [n]} u a_i x_i \leq u b \quad (\text{multiplicação com } u)$$

$$\sum_{i \in [n]} \lfloor u a_i \rfloor x_i \leq u b \quad \text{porque } \lfloor y \rfloor \leq y \text{ e } 0 \leq x_i$$

$$\sum_{i \in [n]} \lfloor u a_i \rfloor x_i \leq \lfloor u b \rfloor \quad \text{porque o lado da esquerda é inteira}$$

O método de Chvátal-Gomory funciona igualmente para combinações lineares de colunas. Com $A = (a^1 \ a^2 \ \cdots \ a^n)$ e $u \in \mathbb{R}^m$ obtemos

$$\sum_{i \in [n]} \lfloor ua^i \rfloor x_i \leq \lfloor ub \rfloor \quad (7)$$

Teorema:

Cada desigualdade válida pode ser construída através de um número finito de aplicações do método de Chvátal-Gomory}.