



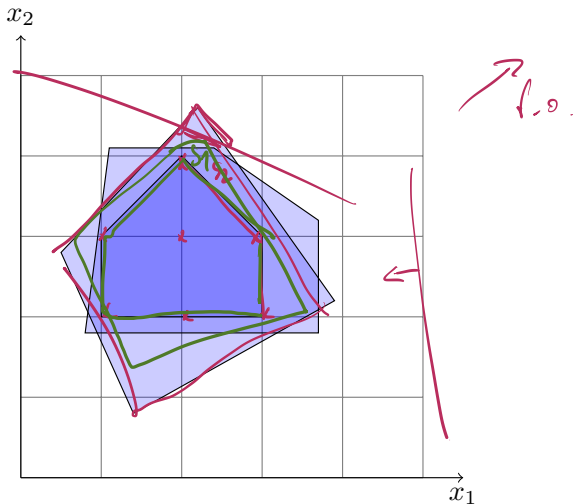
TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 4

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-07-27

seg>

1. Desigualdades válidas
2. Chvátal-Gomory
3. Aplicação à programação inteira



$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

$$\boxed{\pi^T x \leq \pi}$$

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \pi^T x \leq \pi_0\} = P.$$

Definição

Uma desigualdade $\pi^T x \leq \pi_0$ é *válida* para um conjunto P , se $\forall x \in P: \pi^T x \leq \pi_0$. Como encontrar?

- Técnicas de construção (p.ex. método de Chvátal-Gomory)
- Observar e formalizar características específicas do problema.

The determination of families of strong valid inequalities is more of an art than a formal methodology

NP-completo.

maximiza

$$\sum_{i \in [n]} v_i x_i$$

sujeito a

$$\sum_{i \in [n]} p_i x_i \leq P, 4$$

$$x_i \in \mathbb{B} \rightarrow x_i \in [0, 1]$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

d.v. x

Exemplo:

$$79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178$$

$$v_i$$

$$x_i$$

$$0 \quad \frac{35}{53} \quad 1 \quad 1 \quad 1 = 3 \frac{35}{53}$$

$$45$$

$$45 \quad 90$$

$$53 \quad 143$$

$$(35)$$

- Observação: Para um subconjunto $S \subset [1, n]$:

Se $\sum_{i \in S} p_i > P$ então $\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1$.

- Exemplos

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,}$$

$$\underline{x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \leq 3,}$$

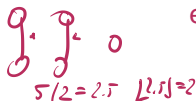
$$\underline{x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3,}$$

$$\underline{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3.}$$

Família de desigualdades válidas.

$$\underline{O(2^n)}$$

- Desigualdades de cobertura*



em P.



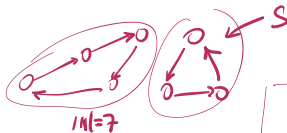
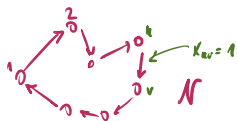
- Escolhe um subconjunto arbitrário de vértices $U \subseteq V$.
- Observação:** O número de arestas internas é $\leq \lfloor |U|/2 \rfloor$.
- Portanto:

d.v. $\sum_{a \in U^2 \cap A} x_a \leq \lfloor |U|/2 \rfloor \quad \forall U \subseteq V \quad (1)$

é uma desigualdade válida.

- Fato:** adicionando essas restrições para todo conjunto U de cardinalidade ímpar maior que 1 descreve a envoltória convexa do problema

$\Rightarrow$ rel. lin. resolve o problema.



$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{sucess. da cid. } i \text{ e } j. \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$x_{ii} = 0$$

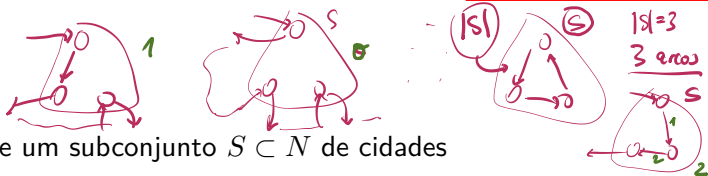
minimiza $\sum_{i,j \in N} c_{ij} x_{ij},$

sujeito a $\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad 1 \text{ succ.} \quad \forall i \in N, \quad (2)$

$\sum_{j \in N} x_{ji} = 1, \quad 1 \text{ pred.} \quad \forall i \in N, \quad (3)$

$x_{ij} \in \mathbb{B}, \quad \forall i, j \in N, \quad (4)$

+ eliminação de subciclos!



- Considere um subconjunto $S \subset N$ de cidades
- Entre cidades em S não podemos selecionar mais que $|S| - 1$ arestas, senão vai formar um subciclo
- Logo:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1,$$

$$\forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, S \neq N. \quad (S_1)$$

$$2^{|N|} - 2 = \Theta(2^{|N|})$$

Ex: subconj. tam. $|N| - k \quad (|N| - k \leq \sum \leq |N| - 1)$



- Associa um “potencial” (uma altura) p_i a cada cidade $i \in N$
- Força o sucessor de i na rota ter um potencial pelo menos $p_i + 1$.
- Para permitir um ciclo global, vamos excluir uma cidade **fixa** $s \in S$ dessa restrição.
- Logo

$$p_i + n(x_{ij} - 1) + 1 \leq p_j$$

poli.

$$\Theta(n^2)$$

$$\forall i, j \in N \setminus \{s\} \quad (S_2)$$

$$x_{ij} = 1 \quad p_i + 1 \leq p_j$$

$$x_{ij} = 0 \quad p_i - n + 1 \leq p_i \Rightarrow \text{inef.}$$

- Base:

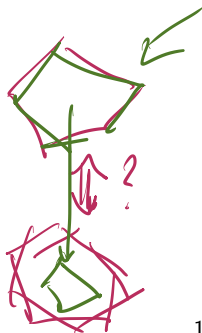
$$P = \{x \mid x \text{ satisfaz } \underline{(2)}, \underline{(3)}, \underline{(4)}\}$$

- Formulação 1:

$$\underline{P_{S_1}} = P \cap \{x \mid x \text{ satisfaz } \underline{(S_1)}\}$$

- Formulação 2:

$$\underline{P_{S_2}} = P \cap \{x \mid x \text{ satisfaz } \underline{(S_2)}\}$$

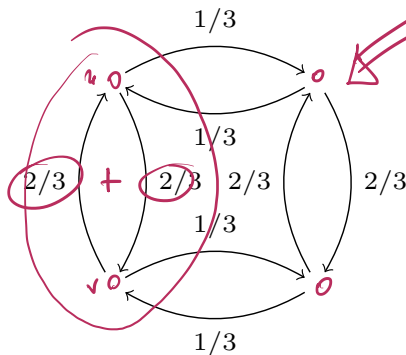


- É possível demonstrar $P_{S_1} \subsetneq P_{S_2}$.
- Ainda:

$$S = \{u, v\}$$

$$|S| - 1 = 1 =$$

$$1/3 = 4/3 =$$



relaxação
linear
 S_2

- Logo (S_1) domina (S_2) .

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in [n]$$

Dado uma restrição

$$\sum_{i \in [n]} a_i x_i \leq b$$

também temos, para $u \in \mathbb{R}, u \geq 0$ as restrições válidas

$$(1) \quad \sum_{i \in [n]} u a_i x_i \leq u b \quad (\text{multiplicação com } u)$$

$$(2) \quad \sum_{i \in [n]} \lfloor u a_i \rfloor x_i \leq u b \quad \text{porque } \lfloor y \rfloor \leq y \text{ e } 0 \leq x_i$$

$$(3) \quad \sum_{i \in [n]} \lfloor u a_i \rfloor x_i \leq \lfloor u b \rfloor \quad \text{porque o lado da esquerda é inteira}$$

d.v. para qq. $u > 0$

$$\underbrace{\sum_{i \in [n]} \lfloor u a_i \rfloor x_i}_{\mathbb{Z}} \leq \lfloor 2.3 \rfloor = 2$$

$$\boxed{0 \leq 0}$$

$$\cup$$

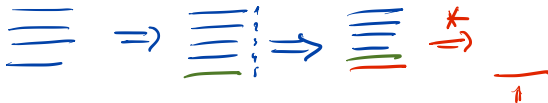
O método de **Chvátal-Gomory** funciona igualmente para combinações lineares de colunas. Com $A = (a^1 \ a^2 \ \cdots \ a^n)$ e $u \in \mathbb{R}_+^m$ obtemos

$$\sum_{i \in [n]} \lfloor \underline{u} a^i \rfloor x_i \leq \lfloor \underline{u} b \rfloor$$

(5)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 3 \quad 1 \cdot u_1 \geq 0 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 5 \quad 1 \cdot u_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\lfloor (u_1 + 2u_2) \rfloor x_1 + \lfloor (u_1 - u_2) \rfloor x_2 \leq \lfloor 3u_1 \rfloor + \lfloor 5u_2 \rfloor$$

Teorema:

Cada desigualdade válida pode ser construída através de um número finito de aplicações do método de Chvátal-Gomory.

Ex.

$$u = 1/79$$

$$79x_1 + 15x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 95x_5 \leq 171$$

$$\left\lfloor \frac{79}{79} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{15}{79} \right\rfloor x_2 + \dots + \left\lfloor \frac{171}{79} \right\rfloor \leq 2$$

A relaxação linear do problema da mochila acima possui as restrições

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \triangleright & 79x_1 & +53x_2 & +53x_3 & +45x_4 & +45x_5 & \leq & 178, & \cdot 1/79 \\
 \triangleright & x_1 & & & & & \leq & 1, & \cdot 0 \\
 \triangleright & & x_2 & & & & \leq & 1, & \cdot 26/79 \\
 \triangleright & & & x_3 & & & \leq & 1, & \cdot 26/79 \\
 \triangleright & & & & x_4 & & \leq & 1, & \cdot 0 \\
 \triangleright & & & & & x_5 & \leq & 1, & \cdot 0
 \end{array}$$

Com $u = (1/79 \ 0 \ 26/79 \ 26/79 \ 0 \ 0)^t$ obtemos a desigualdade válida

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 \leq 2.} \quad \Leftarrow$$

Aplicando o método de Chvátal-Gomory para $U \subseteq V$ com $u = (1/2 \ 1/2 \cdots 1/2)^t \in \mathbb{R}^{|U|}$ às desigualdades

$$\sum_{u \in N(v)} x_{uv} \leq 1, \quad \text{Ex.} \quad \forall v \in U$$

para obter

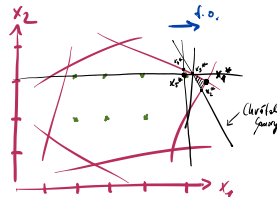
$$\sum_{v \in U} 1/2 \sum_{u \in N(v)} x_{uv} = \sum_{a \in U^2 \cap A} x_a + \sum_{a \in N(U)} 1/2 x_a \leq |U|/2$$

e depois aplicar os pisos com $\sum_{a \in N(U)} \lfloor 1/2 \rfloor x_a = 0$

$$\sum_{a \in U^2 \cap A} x_a \leq \lfloor |U|/2 \rfloor.$$

Algoritmo de Gomory.

- Ideia
 1. Resolve a relaxação linear
 2. Caso a solução está inteira: resolvido.
 3. Senão: adiciona um plano de corte que remove a solução atual.
 4. Repete



Definição:

Um plano de corte é uma restrição válida que todas soluções inteiras satisfazem.

$V := \{x \mid Ax \leq b\}$ { região viável }
 $x^* := \operatorname{argmax}\{c^t x \mid x \in V\}$ { resolve relaxação }
 while $(x^* \notin \mathbb{Z}_+^n)$ do { Simplex }
 encontra um corte $a^t x \leq d$ tal que $a^t x^* > d$ { sol. frac. atual infactível. }
 $V := V \cap \{x \mid a^t x \leq d\}$ { nova região viável }
 $x^* := \operatorname{argmax}\{c^t x \mid x \in V\}$ { nova solução ótima }
 end while

- Podemos garantir que sempre existe um novo corte na linha 4?
Como achar esse novo corte?
- A solução ótima atual é representado pelo dicionário

$$\begin{array}{rcl}
 z & = & \bar{z} + \sum_j \bar{c}_j x_j \\
 \hline
 x_i & = & \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad i \in \mathcal{B}
 \end{array}$$

- Se a solução não é inteira, existe um índice i tal que $x_i \notin \mathbb{Z}_+$,
i.e. $\bar{b}_i \notin \mathbb{Z}_+$.

$$\{b_i\} = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad \bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor = \{ \bar{a}_{ij} \}$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad \text{Linha fracionária} \quad (6)$$

$$x_i \leq \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \quad \text{Definição de } \lfloor \cdot \rfloor \quad (7)$$

$$x_i \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \quad \text{Integralidade de } x \quad (8)$$

$$0 \geq \{ \bar{b}_i \} - \sum_{j \in N} \{ \bar{a}_{ij} \} x_j \quad (6) - (8) \quad (9)$$

$$x_{n+1} = - \{ \bar{b}_i \} + \sum_{j \in N} \{ \bar{a}_{ij} \} x_j \quad \text{Nova variável} \quad (10)$$

$$x_{n+1} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\{ \cdot \} \Rightarrow \{ \cdot \} \leq 0 \quad (11)$$

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ & 10x_1 \leq 27, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.\end{array}$$

Relaxação linear

$$\begin{array}{rcl} z & = & 6.6 \quad -4/30w_2 \quad -1/3w_1 \\ \hline x_2 & = & 3.9 \quad -1/30w_2 \quad -1/3w_1 \\ x_1 & = & 2.7 \quad -1/10w_2 \end{array}$$

Corte de

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 3.9 \quad -1/30w_2 \quad -1/3w_1 \\ \text{é} \\ w_3 & = & -0.9 \quad +1/30w_2 \quad +1/3w_1 \end{array}$$

Novo sistema:

$$\begin{array}{rcll} (4) \quad z & = & 6.6 & -4/30w_2 \quad -1/3w_1 \\ \hline x_2 & = & 3.9 & -1/30w_2 \quad -1/3w_1 \\ x_1 & = & 2.7 & -1/10w_2 \\ w_3 & = & -0.9 & +1/30w_2 \quad +1/3w_1 \end{array}$$

=> Método Simplex dual

Sistema ótimo:

$$\begin{array}{rclcl} z & = & 5.7 & -1/10w_2 & -w_3 \\ \hline x_2 & = & 3 & & -w_3 \\ x_1 & = & 2.7 & -1/10w_2 & \\ w_1 & = & 2.7 & -1/10w_2 & +3w_3 \end{array}$$

Corte x_1 ?

Solução ótima:

$$\begin{array}{rclcl} z & = & 5 & -w_4 & -w_3 \\ \hline x_2 & = & 3 & & -w_3 \\ x_1 & = & 2 & -w_4 & \\ w_1 & = & 2 & -w_4 & +3w_3 \\ w_2 & = & 7 & +10w_4 & \end{array}$$

