



TÉCNICAS DE SOLUÇÃO 5

Marcus Ritt

INF 05010 – Otimização combinatória — <2020-07-27

seg>

1. Desigualdades válidas
2. Chvátal-Gomory
3. Aplicação à programação inteira
4. Algoritmo branch-and-bound

O método de Chvátal-Gomory funciona igualmente para combinações lineares de colunas. Com $A = (a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n)$ e

$u \in \mathbb{R}_+^m$ obtemos

$$\sum_{i \in [n]} \lfloor u^t a^i \rfloor x_i \leq \lfloor u^t b \rfloor$$

CG-cut

(1)

Teorema:

Cada desigualdade válida pode ser construída através de um número finito de aplicações do método de Chvátal-Gomory.

```

{L //  $V := \{x \mid Ax \leq b\}$  { região viável }
  ① //  $x^* := \operatorname{argmax}\{c^t x \mid x \in V\}$  { resolve relaxação }
  // while  $(x^* \notin \mathbb{Z}_+^n)$  do ←
    encontra um corte  $a^t x \leq d$  tal que  $a^t x^* > d$  ←  $x^*$  fracc. ②③
    {L //  $V := V \cap \{x \mid a^t x \leq d\}$  { nova região viável }
      //  $x^* := \operatorname{argmax}\{c^t x \mid x \in V\}$  { nova solução ótima }
    end while
  }
  return  $x^*$ 

```

- A solução ótima atual é representado pelo dicionário

$$z = \bar{z} + \sum_j \bar{c}_j x_j$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad i \in \mathcal{B}$$

- Se a solução não é inteira, existe um índice i tal que $x_i \notin \mathbb{Z}_+$, i.e. $\bar{b}_i \notin \mathbb{Z}_+$.

$$x_{n+1} = -\{\bar{b}_i\} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \{\bar{a}_{ij}\} x_j \quad \text{Nova variável } x_{n+1} \in \mathbb{Z}_+ \quad (2)$$

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

$$\{1.3\} = 0.3$$

$$\{-1.2\} = 0.8$$

↑ maior núm. inteiro menor que x .

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ & 10x_1 \leq 27, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

PI para.

$$\begin{cases} w_1 = 9 + x_1 - 3x_2 \\ w_2 = 27 - 10x_1 \end{cases}$$

Relaxação linear

$$\begin{array}{rcl} z & = & 6.6 - 4/30w_2 - 1/3w_1 \\ x_2 & = & 3.9 - 1/30w_2 - 1/3w_1 \\ x_1 & = & 2.7 - 1/10w_2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} z \\ x_2 \\ x_1 \end{array}} \right\} 2 \text{ linhas free.}$$

Corte de

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 3.9 - 1/30w_2 - 1/3w_1 \\ \text{é} & & \\ w_3 & = & -0.9 + 1/30w_2 + 1/3w_1 \end{array}$$

$$x_{n+1} = -\{b_i\} + \sum_{j \in N} \{a_{ij}\} x_j$$

$$\begin{aligned} w_3 &= -\{3.9\} + \{1/30\}w_2 + \{1/3\}w_1 \\ &= -0.9 + 1/30w_2 + 1/3w_1 \end{aligned}$$

val. $\leq 0 \Leftrightarrow$ dual não
fictícia.

Novo sistema:

$$(4) \quad z = 6.6 - 4/30w_2 - 1/3w_1$$

$$x_2 = 3.9 - 1/30w_2 - 1/3w_1$$

$$x_1 = 2.7 - 1/10w_2$$

$$\textcircled{w_3} = -0.9 + 1/30w_2 + 1/3w_1 \quad \left| \quad \leftarrow$$

=> **Método Simplex dual**

Re-escrever nas variáveis originais:

$$-0.9 + 1/30 \textcircled{w_2} + 1/3 \textcircled{w_1} \geq 0$$

$$-0.9 + 1/30(2+x_2) + 1/3(9+x_1-3x_2) \geq 0$$



$$x_2 \leq 2$$

Sistema ótimo: *depois pivô $w_3 - w_1$*

$$z = 5.7 - 1/10w_2 - w_3$$

$$x_2 = 3 - w_3$$

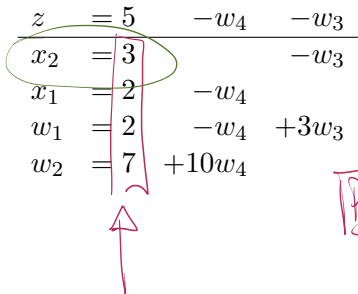
$$x_1 = 2.7 - 1/10w_2$$

$$w_1 = 2.7 - 1/10w_2 + 3w_3$$

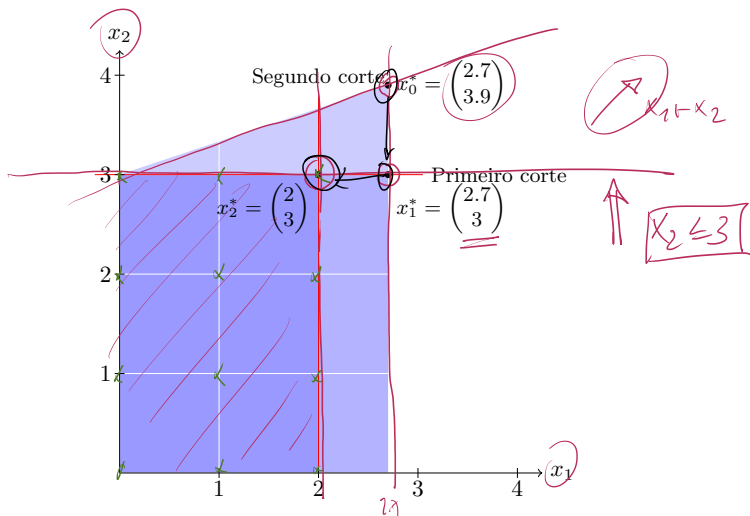
Corte x_1 ?

$$\begin{aligned} w_4 &= -2.73 + 1/10 w_2 \\ &= -0.7 + 1/10 w_2 \end{aligned}$$

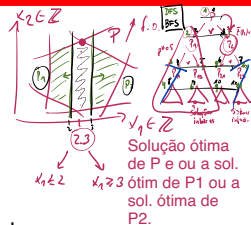
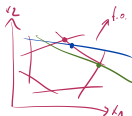
Solução ótima:

$$\begin{array}{rcll} z & = & 5 & -w_4 \quad -w_3 \\ \hline x_2 & = & 3 & -w_3 \\ x_1 & = & 2 & -w_4 \\ w_1 & = & 2 & -w_4 + 3w_3 \\ w_2 & = & 7 & +10w_4 \end{array}$$


Para



Land & Doig (1965)



Ideia básica:

- **Particiona um problema** em subproblemas disjuntos e procura soluções recursivamente. **Restrições**
- Evite percorrer toda árvore de busca, **calculando limites** e **F.o.**

Max.

- 3
 Melhor solução atual (incumbente) Solução inicial conhecida ou $-\infty$ (max.)
 valor (z^*) : crescer (max.)
- 2
 Estratégia de ramificação (ou particionamento) 00 (min.)
- 4
 Estratégia de busca Busca em profundidade; busca em largura; best-bound search: sempre continuar com o subproblema de melhor limite.
- 1
 Limite inferior (min) ou superior (max) para solução atual

Subproblema P: limite inferior (min), limite sup. (max).

ao valor da função objetivo do subproblema.

$$\textcircled{P} \quad \boxed{\textcircled{2(P)} = \textcircled{30}}$$

 $\bar{z}(P) > z^*$: Continuar a busca. $\bar{z}(P) = z^*$: ~~poder~~ corte por otimalidade $\bar{z}(P) < z^*$: ~~poder~~ corte por limite
 $\bar{z}(P)$: limite p! o maior valor possível neste subproblema

{ com $\bar{z}$ para estimar limite superior }

$z^* := -\infty$ { limite inferior }

$A := \{(P, \bar{z}(P))\}$ { nós ativos }

while $A \neq \emptyset$ do *Subproblemas*

Escolhe: $(P, \bar{z}(P)) \in A$; $A := A \setminus (P, \bar{z}(P))$

Ramifique: Gera subproblemas $P_1, \dots, P_n$.

for all P_i , $1 \leq i \leq n$ do

{ adiciona, se permite melhor solução }

if $\bar{z}(P_i) > \bar{z}$ then

$A := A \cup \{(P_i, \bar{z}(P_i))\}$

end if

{ atualize melhor solução }

if (solução $\bar{z}(P_i)$ é viável) then

$\bar{z} := \bar{z}(P_i)$

end if

end for

end while

$\triangleright x_1 = 2.3$ 4-
 $\triangleright x_2 = 3.0$ 4-
escolha
 $x_1 \leq 2$ $x_2 \geq 3$ $x_1 \leq 3$ $x_2 \leq 4$
 $\uparrow$ $\uparrow$ $m=2$

$\leq$

$\bar{z}(P)$ *lim. sup.*

$$S = \{x \mid Ax \leq b\}$$

- Problema PI (puro): $\{\max c^t x \mid x \in S, x \in \mathbb{Z}_+^n\}$.
- Estratégia de ramificação
 - Escolhe uma variável inteira x_i com valor fracionário.
 - **Heurística**: Variável mais fracionária: $\operatorname{argmin}_i |\{x_i\} - 0.5|$.
- Particione o problema $S = S_1 \dot{\cup} S_2$ tal que $(S_1 \cap S_2 = \emptyset)$

$$S_1 = S \cap \{x \mid x_i \leq \lfloor v_i \rfloor\}; \quad S_2 = S \cap \{x \mid x_i \geq \lceil v_i \rceil\}$$

- Em particular com variáveis $x_i \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$

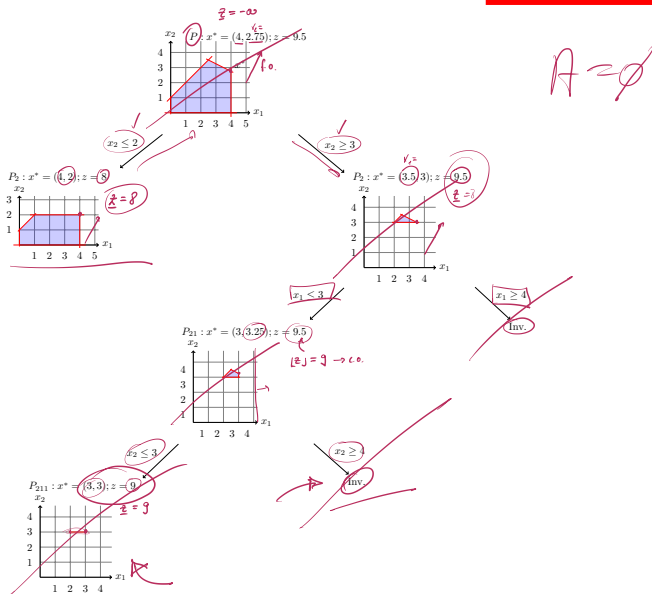
$$S_1 = S \cap \{x \mid x_i = 0\}; \quad S_2 = S \cap \{x \mid x_i = 1\}$$

- Limite: relaxação linear. $\Rightarrow$ Caso a rel. linear possui uma solução integral: encontramos uma nova sol. Para.

maximiza $x_1 + 2x_2$
sujeito a $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $-2x_1 + 4x_2 \leq 19$
 $x_1 \leq 4$
 $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Handwritten notes: A red circle is drawn around the objective function and the first constraint. A red arrow points from the coefficient 2 in the objective function to the coefficient 1 in the first constraint. The text "q1 pura" is written in red next to the integer constraint.





$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & 13x_1 + 18x_2 + 14x_3 + 12x_4, \\ \text{sujeito a} & 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 24, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\},\end{array}$$

