

Classificação e Pesquisa de Dados

Aulas 18 e 19
Árvores AVL

UFRGS

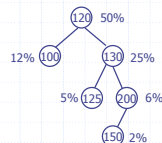
INF01124

1

Balanceamento de Árvores

- ◆ Busca minimizar o número médio de comparações necessárias para localizar uma dada chave
- ◆ Operações de inserção e remoção de nós tendem a tornar árvores desbalanceadas
- ◆ Se a distribuição dos acessos às chaves não for uniforme, é desejável que as chaves mais solicitadas se localizem mais próximas à raiz

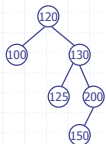
■ Exemplo



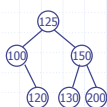
2

Balanceamento por Altura

- ◆ Pressupõe uma distribuição uniforme dos acessos às várias chaves
- ◆ Busca minimizar a altura da árvore
- ◆ Uma árvore é dita completamente balanceada por altura se a distância média dos nós até a raiz for mínima



Árvore não balanceada por altura

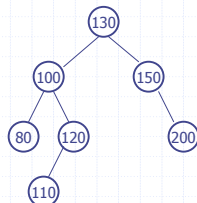


Árvore balanceada por altura

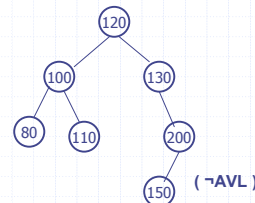
3

Árvores AVL

- ◆ Uma árvore binária **T** é denominada **AVL** se, para todo nó de **T**, as alturas de suas duas subárvores diferem no máximo de uma unidade
- ◆ Operações de consulta, inserção e remoção de nós tem custo $O(\log_2 n)$



(AVL)



(¬AVL)

4

Árvores AVL

Operação de Inserção de um nó

- ◆ A inserção ou remoção de um nó em uma árvore AVL pode provocar seu desbalanceamento
- ◆ Se a árvore AVL ficar desbalanceada, é preciso efetuar **operações** de restabelecimento do balanceamento de seus nós
 - Rotação **direita**
 - Rotação **esquerda**
 - Rotação **dupla direita**
 - Rotação **dupla esquerda**

5

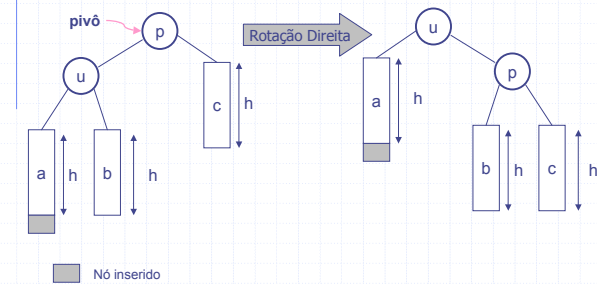
Árvores AVL

Rotações

- ◆ Rotação Direita ou Rotação Dupla Direita servem para compensar a inserção de um nó em uma sub-árvore esquerda ou a remoção de um nó de uma sub-árvore direita que tenha levado a árvore a ficar desbalanceada
- ◆ Rotação Esquerda ou Rotação Dupla Esquerda servem para compensar a inserção de um nó em uma sub-árvore direita ou a remoção de um nó de uma sub-árvore esquerda que tenha levado a árvore a ficar desbalanceada.

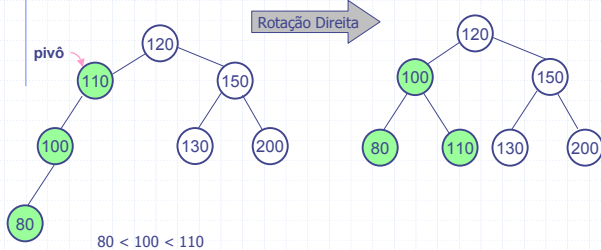
6

Árvores AVL Rotação Direita



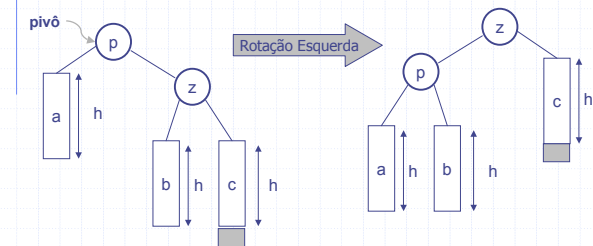
7

Árvores AVL Rotação Direita



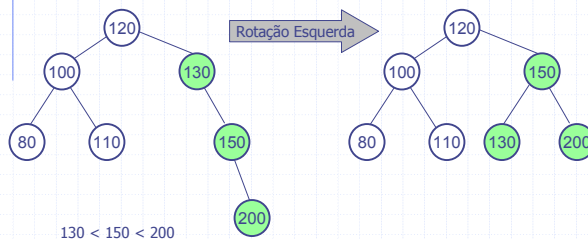
8

Árvores AVL Rotação Esquerda



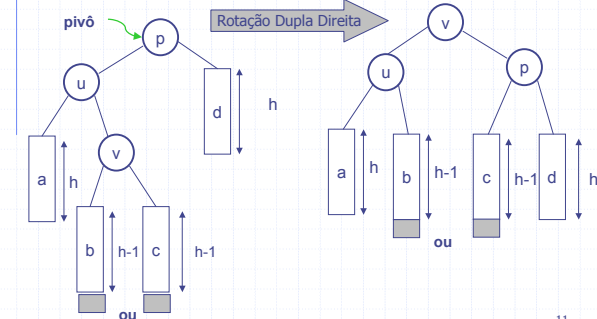
9

Árvores AVL Rotação Esquerda



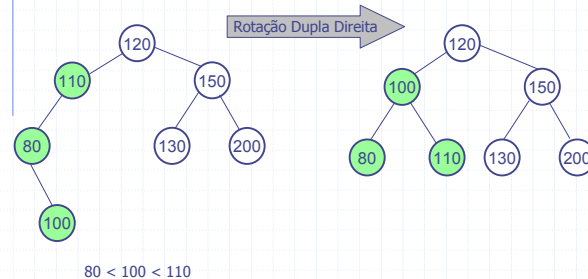
10

Árvores AVL Dupla Rotação Direita



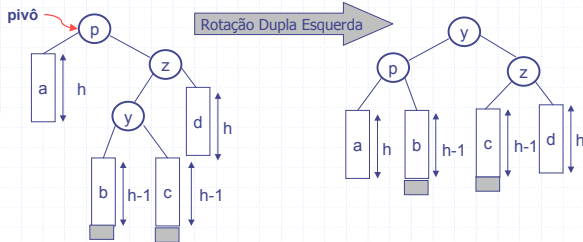
11

Árvores AVL Dupla Rotação Direita



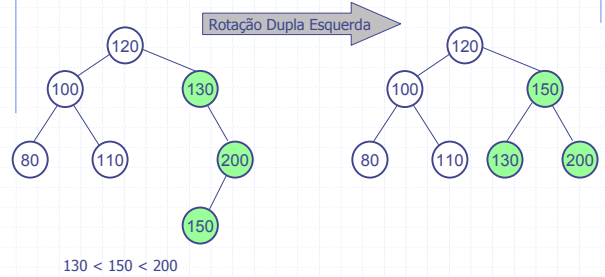
12

Árvores AVL Dupla Rotação Esquerda



13

Árvores AVL Dupla Rotação Esquerda



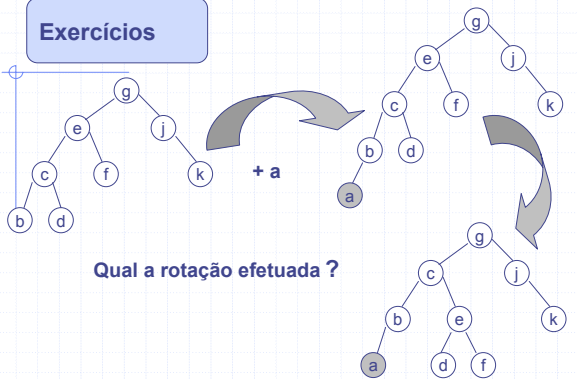
14

Árvores AVL Resumo

- ◆ Situação em que a árvore fica desbalanceada
 - Seja **p** o nó mais próximo das folhas de **T** que se tornou desbalanceado ($|he(p) - hd(p)| = 2$)
 - **Caso 1:** $he(p) > hd(p)$
Sendo **u** o filho à esquerda de **p**
 - A) $he(u) > hd(u) \Rightarrow$ rotação direita
 - B) $hd(u) > he(u) \Rightarrow$ rotação dupla direita
 - **Caso 2:** $hd(p) > he(p)$
Sendo **z** o filho à direita de **p**
 - A) $hd(z) > he(z) \Rightarrow$ rotação esquerda
 - B) $he(z) > hd(z) \Rightarrow$ rotação dupla esquerda

15

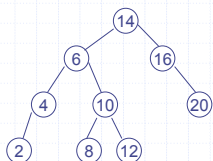
Exercícios



Qual a rotação efetuada ?

16

Exercícios



+ 13 ?

17

Árvores AVL Inserindo um Nó

- ◆ Percorre-se a árvore verificando se a chave já existe ou não.
 - Em caso positivo, encerra a tentativa de inserção.
 - Caso contrário, a busca encontra o local para inserção do novo nó
- ◆ Verifica-se se a inclusão tornará a árvore desbalanceada.
 - Em caso negativo, insere e o processo termina.
 - Caso contrário, insere e efetua o balanceamento da árvore
- ◆ Descobre-se qual a operação de rotação a ser executada
- ◆ Executa-se a rotação

18

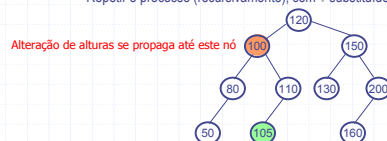
Árvores AVL Inserindo um Nó

- ◆ Como saber se a árvore está desbalanceada?
 - Verificando se existe algum nó "desregulado"
- ◆ Como saber se um nó está desregulado?
 - Subtraindo-se as alturas de suas sub-árvores
- ◆ Por questões de eficiência estas diferenças são pré-calculadas e armazenadas nos nós correspondentes, sendo atualizadas durante inserções e remoções
- ◆ Possíveis valores de diferença para uma sub-árvore balanceada: -1, 0, 1

19

Árvores AVL Exemplo: inserção na sub-árvore esquerda

- ◆ Seja v um nó da árvore. Se antes da inclusão:
 - $\text{Balanço}(v)=1$, então $\text{Balanço}(v)$ se tornará 0
 - altura da árvore não foi alterada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, também não se altera.
 - $\text{Balanço}(v)=0$, então $\text{Balanço}(v)$ se tornará -1
 - altura da árvore foi modificada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, pode ter sido alterada também.
 - Repetir o processo (recursivamente), com v substituído por seu pai.



20

Árvores AVL Exemplo: inserção na sub-árvore esquerda

- ◆ Seja v um nó da árvore. Se antes da inclusão:
 - $\text{Balanço}(v)=1$, então $\text{Balanço}(v)$ se tornará 0
 - altura da árvore não foi alterada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, também não se altera.
 - $\text{Balanço}(v)=0$, então $\text{Balanço}(v)$ se tornará -1
 - altura da árvore foi modificada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, pode ter sido alterada também.
 - Repetir o processo (recursivamente), com v substituído por seu pai.
 - $\text{Balanço}(v)=-1$, então $\text{Balanço}(v)$ se tornará -2
 - altura da árvore foi modificada e o nó está desregulado
 - Rotação correta deve ser empregada.
 - Como a árvore será redesenhada, não é necessário verificar os outros nós.

21