Otimizações de simulações quânticas no ambiente VPE-qGM

Giovani de Quadros Rodrigues
Renata Hax Sander Reiser
Maurício Lima Pilla

Ciência da Computação
LUPS - Laboratory of Ubiquitous and Parallel Systems
Universidade Federal de Pelotas
gdqrodrigues@inf.ufpel.edu.br

Março de 2015

Computação Quântica

A Computação Quântica estima obter um desempenho superior ao da computação clássica, em razão do paralelismo observado na Mecânica Quântica

Qubits

Bits quânticos (qubits) podem atingir um estado de sobreposição, sendo α e β coeficientes complexos de ψ, onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações Quânticas

Análogas às portas lógicas, transformações são responsáveis por alterar o valor de um qubit através da multiplicação matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

VPE-qGM

O ambiente VPE-qGM oferece suporte à modelagem e simulação de circuitos quânticos através de processos elementares (PEs).

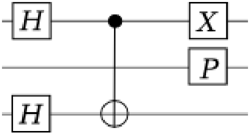

Figura: Circuito quântico

Problema

Devido ao crescimento exponencial da memória em relação ao número de qubits, as simulações quânticas acabam por atingir a complexidade $O(4^n)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 qubits - 4^2 unidades de memória
3 qubits - 4^3 unidades de memória

Proposta

Visando aprimorar o desempenho do ambiente, são necessárias otimizações para reduzir a complexidade espacial e temporal do simulador

Transformações unitárias

Para reduzir a complexidade espacial, a primeira otimização consiste em aplicar individualmente as transformações quânticas em seus qubits correspondentes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Transformações unitárias - Caso 1

No primeiro caso, há somente um elemento não nulo *n* no estado quântico. Assim, o resultado obtido é a coluna *n* da transformação aplicada.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	Não nulos
Transformação NOT - C0	1
Transformação NOT - C1	0
Estado quântico	1
Estado resultante	0

Transformações unitárias - Caso 2

No segundo caso, não há elementos nulos no estado quântico.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	Não nulos	Sinais
Transformação NOT - C0	01	00
Transformação NOT - C1	10	00
Estado quântico	11	01
Estado resultante	11	10

Os valores referentes a sinais, números imaginários e $\sqrt{i}$ são acrescentados apenas quando existe uma transformação ou um estado quântico que os usa

Transformações unitárias - Caso 3

No terceiro caso, não existem otimizações possíveis para estados tipicamente complexos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Produto tensorial final

O estado quântico resultante é obtido através do produto tensorial entre todos os qubits do estado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Produto tensorial final - Caso 1

Caso todos os qubits possuam um único elemento não nulo, o resultado em um sistema de n qubits é $\sum_{i=0}^{n}\left(V_i \times 2^{n-i}\right)$, para os valores V_i de cada qubit i

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(1,0,1) = (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 5$$

Produto tensorial final - Caso 2

Neste caso, pelo menos um dos qubits do estado é formado por dois elementos não-nulos.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Produto tensorial final - Caso 2

No primeiro passo, as representações dos qubits passam por uma conversão de compatibilidade

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	Não nulos	Sinais
Qubit 1	01	00
Qubit 2	11	01
Qubit 3	10	00

Produto tensorial final - Caso 2

Em um sistema de n qubits, sendo i a iteração:

$$g(x,i,n) = x \times (2^n - 1)/(10^{2^{n-i-1}} + 1)$$

$$f(x,i,n) = (g(x_0,i,n) << 2^{n-i-1}) + g(x_1,i,n)$$

$$f(01,0,3) = (g(0,0,3) << 4) + g(1,0,3) = 0000000 + 1111 = 00001111$$

$$f(11,1,3) = (g(1,1,3) << 2) + g(1,1,3) = 11001100 + 110011 = 11111111$$

$$f(10,2,3) = (g(1,2,3) << 1) + g(0,2,3) = 10101010 + 0000000 = 10101010$$

$$f(01,0,3)\ AND\ f(11,1,3)\ AND\ f(10,2,3) = 00001010$$

Produto tensorial final - Caso 2

$$f(00) = 00000000$$

$$f(01) = 00110011$$

$$f(00) = 00000000$$

$$f(01)\ \ XOR\ \ f(11)\ \ XOR\ \ f(10) = 00110011$$

Produto tensorial final - Caso 2

A seguir, as variáveis adicionais usadas passam pela operação AND com a variável referente aos não-nulos.

$$00110011 \;\; AND \;\; 00001010 = 00000010$$

Redução na complexidade temporal

Análise assintótica

- Melhor caso: $O(n)$
- Pior caso: $O(2^n)$

Otimizações de simulações quânticas no ambiente VPE-qGM

Giovani de Quadros Rodrigues
Renata Hax Sander Reiser
Maurício Lima Pilla

Ciência da Computação
LUPS - Laboratory of Ubiquitous and Parallel Systems
Universidade Federal de Pelotas
gdqrodrigues@inf.ufpel.edu.br

Março de 2015