

Circuitos Digitais

Minimização de Funções Booleanas Mapas de Karnaugh

Aula 9

1. Mapas de Karnaugh com 2 variáveis

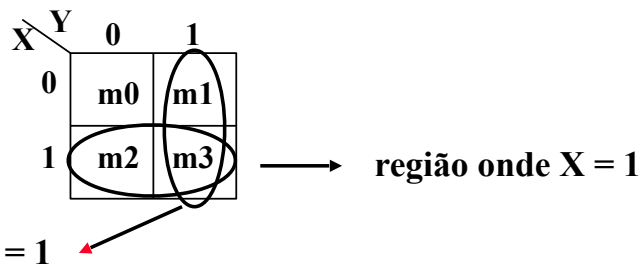
- Diagrama onde cada célula corresponde a um mintermo
- Exemplo com 2 variáveis

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$ m0	$\bar{X}Y$ m1
1	$X\bar{Y}$ m2	XY m3

- Representação de uma função como soma de mintermos
- Cada célula recebe valor 1 ou 0, conforme valor da função para aquele mintermo
- Exemplo: $F = \Sigma m(1,2,3) = \bar{X}\bar{Y} + XY + \bar{X}Y$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

- Células => mintermos
- Regiões retangulares => termos-produto



lei
distributiva

- Exemplo: $F = \sum m(1,2,3)$

$$F = X\bar{Y} + \bar{X}Y + XY = \bar{X}Y + X(\bar{Y} + Y) = \bar{X}Y + X = (X + \bar{X})(X + Y) = X + Y$$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

Portanto:

F = soma de mintermos

ou

F = soma de termos-produto que cobrem a região

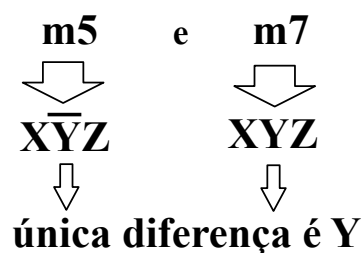
cada mintermo tem que ser coberto por pelo menos 1 termo

2. Mapas de Karnaugh com 3 variáveis

X \ YZ	00	01	11	10
0	m0	m1	m3	m2
1	m4	m5	m7	m6

Concatenar bit da linha com bits da
coluna para identificar mintermo

- Mintermos não seguem a ordem crescente
=> útil para simplificação
- 2 células vizinhas (adjacentes): mintermos diferem por uma variável



- Atenção: vizinhança através das bordas

$$m0 \longleftrightarrow m2$$

$$m4 \longleftrightarrow m6$$

- Soma de 2 mintermos adjacentes pode ser simplificada eliminando-se a variável que difere nos mintermos

$$m5 + m7 = X\bar{Y}Z + XYZ = XZ(\bar{Y} + Y) = \text{XZ}$$

É o que há de comum entre os mintermos = região do mapa

- Portanto: região com 2 células adjacentes $\Rightarrow$ termo com 2 literais
célula isolada $\Rightarrow$ mintermo com 3 literais

- Exemplo de simplificação

YZ	00	01	11	10
X 0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$F = \Sigma m(2,3,4,5)$$

$$F = \bar{X}Y + X\bar{Y}$$

- Exemplo de simplificação

YZ	00	01	11	10
X 0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$$F = \Sigma m(3,4,6,7)$$

$$F = YZ + X\bar{Z}$$

- Soma de 4 mintermos adjacentes também pode ser simplificada

YZ	00	01	11	10
X 0	m0	m1	m3	m2
1	m4	m5	m7	m6

$$m2 + m3 + m6 + m7$$

É o que há de comum entre os 4 mintermos

$$\bar{X}Y \quad XY = (\bar{X} + X)Y = Y$$

- Portanto: região com 4 células adjacentes => termo com 1 literal

- Exemplo de simplificação

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	1	0	0	1
	1	1	1	0	1

$$F = \Sigma m(0,2,4,5,6)$$

Solução 1: $F = \bar{Z} + X\bar{Y}Z$ (não otimizada)

Solução 2 (com redundância) : $F = \bar{Z} + X\bar{Y}$
ou seja, mintermo m4 coberto pelos 2 termos quando $X=1, Y=0, Z=0$

- Situações onde existem 2 soluções mínimas possíveis

$$F = \Sigma m(1,3,4,5,6)$$

		YZ			
		00	01	11	10
X	0		1	1	
	1	1	1		1

Solução 1: $F = \bar{X}Z + X\bar{Z} + X\bar{Y}$

Solução 2: $F = \bar{X}Z + X\bar{Z} + \bar{Y}Z$



2 alternativas para cobrir o mintermo XYZ

3. Mapas de Karnaugh com 4 variáveis

YZ WX		YZ			
		00	01	11	10
WX	00	m0	m1	m3	m2
	01	m4	m5	m7	m6
	11	m12	m13	m15	m14
	10	m8	m9	m11	m10

Concatenar bits da linha com bits da coluna para identificar mintermos

- Notar adjacências através das bordas

$$m0 \longleftrightarrow m8$$

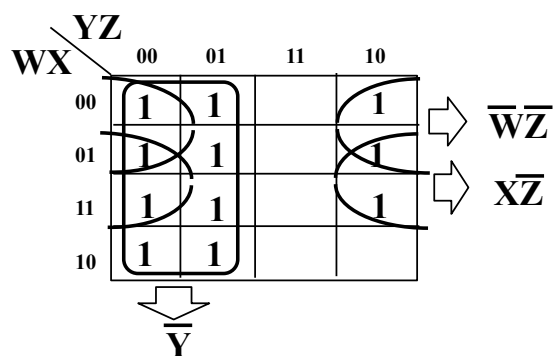
$$m0 \longleftrightarrow m2$$

$$m1 \longleftrightarrow m9$$

$$m4 \longleftrightarrow m6$$

célula isolada	⇒	termo com 4 literais
região com 2 células	⇒	termo com 3 literais
região com 4 células	⇒	termo com 2 literais
região com 8 células	⇒	termo com 1 literal

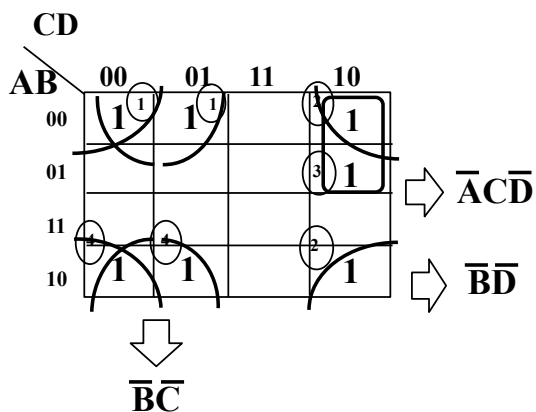
• Exemplo de simplificação



$$F = \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

$$F = \bar{Y} + \bar{W}\bar{Z} + X\bar{Z}$$

• Exemplo de simplificação partindo de uma soma-de-produtos qualquer (não de uma soma de mintermos)



$$F = \overset{\textcircled{1}}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + \overset{\textcircled{2}}{\bar{B}\bar{C}\bar{D}} + \overset{\textcircled{3}}{\bar{A}B\bar{C}\bar{D}} + \overset{\textcircled{4}}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$$

3 literais: regiões com 2 células

$$F = \bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$$

4. Implicantes Primos

- Implicante Primo = termo-produto obtido considerando-se o maior número possível de células adjacentes
- Se mintermo é coberto por um único implicante primo => **IMPLICANTE PRIMO ESSENCIAL**
- Exemplo

YZ	00	01	11	10
X 0		1	1	
1	1	1		1

Implicantes Primos

$\bar{X}Z$
 $X\bar{Y}$
 $X\bar{Z}$
 $\bar{Y}Z$

Implicantes Primos Essenciais

$\bar{X}Z$
 $X\bar{Z}$

- Obtenção dos implicantes primos

Mintermo isolado



se não for contido numa região com 2 mintermos adjacentes

Região com 2 termos adjacentes



se não for contida numa região com 4 mintermos adjacentes

- Obtenção dos implicantes primos essenciais

Verificar cada mintermo com 1



se for coberto só por 1 implicante primo, então este é implicante primo essencial

- Algoritmo para obtenção da expressão simplificada para a função

1. Obter implicantes primos
2. Obter implicantes primos essenciais
3. Expressão = soma lógica dos implicantes primos essenciais

+

outros implicantes primos necessários para cobrir outros mintermos

- Exemplo 1

CD	00	01	11	10
AB 00		1	1	
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

3 implicantes primos

$\bar{A}D$ → essencial

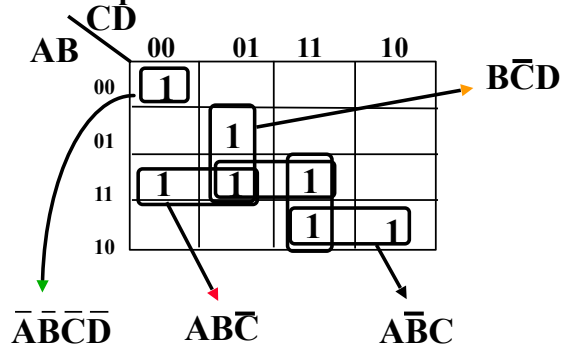
$\bar{A}B$
 $B\bar{D}$ → essencial

Não é essencial - todos seus mintermos são cobertos por mais de 1 implicante primo

$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

• Exemplo 2

$$F = \sum m(0,5,10,11,12,13,15)$$



6 implicants primos

p1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	→	essencial	m0
p2	$\bar{B}\bar{C}D$	→	essencial	m5
p3	$AB\bar{C}$	→	essencial	m12
p4	ABD	→	escolher entre 1 destes	
p5	ACD	→		
p6	$\bar{A}\bar{B}C$	→	essencial	m10

• Tabela de Cobertura

	m0	m5	m10	m11	m12	m13	m15	
p1	X							essencial
p2		X					X	essencial
p3					X	X		essencial
p4						X	X	escolher entre 1 destes
p5				X			X	
p6		X	X					essencial

falta cobrir só m15 - pode-se escolher p4 ou p5

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \begin{matrix} ABD \\ \text{ou} \\ ACD \end{matrix}$$

Método de Quine - McCluskey

Funções com Saídas Não-Especificadas

- Suponha-se uma função cuja entrada é um código BCD

A	B	C	D	F	
0	0	0	0	1	m0
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	m3 m4
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	m7 m8
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	X	
1	0	1	1	X	
1	1	0	0	X	
1	1	0	1	X	
1	1	1	0	X	
1	1	1	1	X	

- Sabe-se que estas combinações de entradas nunca ocorrerão
- Valor da saída não precisa ser especificado
don't care = X

- Simplificação da função usando mapa de Karnaugh

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	1		1	
01	1		1	
11	X	X	X	X
10	1		X	X

- X pode ser 0 ou 1 => o que for mais conveniente para simplificar a função

$$F = \bar{C}\bar{D} + CD$$

© A. Casacurta

Exercício:

Represente a Função F relativa ao Mapa de Karnaugh abaixo, através de uma soma de mintermos. Faça a MINIMIZAÇÃO da função, escreva a função resultante e desenhe o circuito lógico.

WX \ YZ				
	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	X	0	X
11	1	1	X	1
10	1	X	0	1

$$F = W'XY'Z' + WXY'Z' + WX'Y'Z' + WXY'Z + WXYZ' + WX'YZ'$$

$$F = XY' + WZ'$$

© A. Casacurta