

CÁLCULO LAMBDA

Linguagem para descrever e avaliar **funções**.

Por que estudar funções em Ciência da Computação?

- ⇒ Um programa pode ser visto como uma função de valores de entrada em valores de saída (possivelmente modificando uma memória).
- ⇒ Todas (e exatamente) as funções computáveis podem ser representadas em cálculo lambda. Como este cálculo possui sintaxe e semântica simples, ele pode ser usado como base para estudar a semântica de linguagens de programação.
- ⇒ A base da Semântica Denotacional é o cálculo lambda.
- ⇒ Linguagens de programação funcionais são variações sintáticas do cálculo lambda.

Como descrever um programa complexo através de uma função?

CÁLCULO LAMBDA

⇒ Desenvolvido por A. Church nos anos 30

⇒ .Em cálculo lambda as funções são **anônimas**:

$cubo : Integer \rightarrow Integer$ onde $cube(n) = n^3$



$\lambda n.n^3$

⇒ Idéia básica de representar programas em cálculo λ :

programa	$\Rightarrow$	<i>expressão lambda</i>
execução de uma ins- trução	$\Rightarrow$	<i>substituição de vari- áveis por valores em uma expressão λ</i>

Sintaxe de Expressões Lambda

$\langle \text{expression} \rangle \quad := \quad \begin{array}{l} \langle \text{variable} \rangle \\ | \quad \langle \text{constant} \rangle \\ | \quad (\langle \text{expression} \rangle \langle \text{expression} \rangle) \\ | \quad (\lambda \langle \text{variable} \rangle . \langle \text{expression} \rangle) \end{array}$

Obs.: No cálculo lambda puro não existem *constantes*.

Exemplos:

x

$(\lambda x.x)$

$(x \ y)$

$(\lambda x.(\lambda y.x))$

$((\lambda x.(\lambda y.x)) \ a)$

$(\lambda x.(\lambda y.x + y))$

Interpretação de Expressões λ

$\Rightarrow$ Definição de uma função: x é a variável da função e M é o corpo da função.

$$(\lambda x.M) \quad \leftrightarrow \quad f(x) = M$$

$$\begin{array}{ll} (\lambda x.x) & \leftrightarrow f(x) = x \\ (\lambda y.x) & \leftrightarrow g(y) = x \\ (\lambda x.(\lambda y.x)) & \leftrightarrow h(x,y) = x \text{ ou} \\ & h(x) = g(y) \text{ e } g(y) = x \end{array}$$

⇒ Aplicação de uma função: substituir todas as ocorrências da variável da função no corpo pelo argumento.

$$\begin{array}{ll} (F\ A) & \leftrightarrow \quad F(A) \\ ((\lambda x.M)\ A) & \leftrightarrow \quad f(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ((\lambda x.x)\ a) & \leftrightarrow \quad f(a) = a \\ ((\lambda y.x)\ a) & \leftrightarrow \quad g(a) = x \\ ((\lambda x.(\lambda y.x))\ a) & \leftrightarrow \quad h(a) = g(y) \text{ e } g(y) = a \\ (((\lambda x.(\lambda y.x))\ a)\ b) & \leftrightarrow \quad h(a) = g(b) \text{ e } g(b) = a \end{array}$$

Exemplo de função com constantes:

$$(((\lambda f.(\lambda x. (f\ (f\ x))))\ \text{sqr})\ 3)$$

$$\begin{array}{l} = \quad ((\lambda x. (\text{sqr}\ (\text{sqr}\ x)))\ 3) \\ = \quad (\text{sqr}\ (\text{sqr}\ 3)) \\ = \quad 81 \end{array}$$

Simplificação da Notação

1. Identificadores iniciando com letras maiúsculas são meta-variáveis para expressões lambda.

2. Aplicação de funções é associativa à esquerda:

$E1\ E2\ E3$ significa $((E1\ E2)\ E3)$

3. O escopo de variáveis lambda em uma abstração vai até o mais à direita possível:

$\lambda x.\ E1\ E2\ E3$ significa $(\lambda x.\ (E1\ E2\ E3))$

4. Uma abstração permite uma lista de variáveis:

$\lambda x\ y\ z.\ E$ significa $(\lambda x.\ (\lambda y.\ (\lambda z.\ E)))$

5. Nomeação de funções lambda:

$\text{define } \langle \text{name} \rangle = \langle \text{expression} \rangle$

exemplo: $\text{define } Twice = \lambda f.\ \lambda x.\ f(f\ x)$

$(Twice\ (\lambda n.\ (add\ n\ 1))\ 5) = 7$

Semântica de Expressões Lambda

Definition 1. Uma **ocorrência** de uma variável v em uma expressão lambda é chamada **ligada** se ela está dentro do escopo de um λv ; senão ela é chamada **livre**.

Exemplo: $\lambda x. y \lambda y. y x$

Definition 2. O **conjunto de variáveis livres** de uma expressão lambda E , denotado por $FV(E)$, é definido por:

- a. $FV(c) = \emptyset$ para qualquer constante c
- b. $FV(x) = \{x\}$ para qualquer variável x
- c. $FV(E1 E2) = FV(E1) \cup FV(E2)$
- d. $FV(\lambda x. E) = FV(E) - \{x\}$

Uma expressão lambda sem variáveis livres é chamada **fechada**.

Semântica de Expressões Lambda

Definition 3. A substituição de uma variável (livre) v por uma expressão $E1$ em uma expressão lambda E é denotada por $E[v \rightarrow E1]$ e definida por:

- a. $v[v \rightarrow E1] = E1$ para qualquer variável v
- b. $x[v \rightarrow E1] = x$ para qualquer variável $x \neq v$
- c. $c[v \rightarrow E1] = c$ para qualquer constante c
- d. $(F A)[v \rightarrow E1] = ((F[v \rightarrow E1]) (A[v \rightarrow E1]))$
- e. $(\lambda v. E)[v \rightarrow E1] = (\lambda v. E)$
- f. $(\lambda x. E)[v \rightarrow E1] = (\lambda x. E[v \rightarrow E1])$ se $x \neq v$ e $x \notin FV(E1)$
- g. $(\lambda x. E)[v \rightarrow E1] = (\lambda z. E[x \rightarrow z][v \rightarrow E1])$ se $x \neq v$ e $x \in FV(E1)$, onde $z \neq v$ e $z \notin FV(E E1)$

Exemplo: $(\lambda y. (\lambda f. f x) y)[x \rightarrow f y]$