

λ —REDUÇÃO

Simplificar ou avaliar uma expressão λ consiste em aplicar regras de redução sucessivamente até que mais nenhuma regra possa ser aplicada.

Regras de Redução

α —Redução: troca de nome de variáveis

β —Redução: aplicação de função

η —Redução: equivalência de funções

δ —Redução: tratamento de valores pré-definidos

α –Redução

Objetivo: Trocar o nome de variáveis ligadas.

Definition. α –Redução

Sejam v e w variáveis e E uma expressão λ . A expressão

$$\lambda v. E \Rightarrow_{\alpha} \lambda w. E[v \rightarrow w]$$

denota uma α –Redução, desde que w não ocorra em E (esta condição assegura que a substituição $E[v \rightarrow w]$ é segura).

Exemplos:

$$\lambda y. (\lambda f. f x) y \Rightarrow_{\alpha} \lambda z. (\lambda f. f x) z$$

$$\lambda z. (\lambda f. f x) z \Rightarrow_{\alpha} \lambda z. (\lambda g. g x) z$$

β –Redução

Objetivo: Aplicar uma função a um argumento.

Definition. β –Redução

Sejam v uma variável, E e $E1$ expressões λ . A expressão

$$(\lambda v. E) E1 \Rightarrow_{\beta} E[v \rightarrow E1]$$

denota uma β –Redução, desde que a substituição $E[v \rightarrow E1]$ seja segura.

Notação:

função: $(\lambda v. E)$

argumento: $E1$

aplicação: $E[v \rightarrow E1]$

β –redex: $(\lambda v. E) E1$ (**R**eduction **E**xpression)

Exemplos:

$$(\lambda x. x) (y z)$$

$$(\lambda y. (\lambda x. x z) y) w$$

Avaliação de Expressões em Cálculo Lambda Puro

Consiste de uma série de β –reduções possivelmente intercaladas com α –reduções para trocar o nome de variáveis ligadas e evitar confusão.

$$\begin{aligned} E \Rightarrow F: & E \Rightarrow_{\beta} F \text{ ou } E \Rightarrow_{\alpha} F \\ \Rightarrow^* : & \text{ fecho reflexivo e transitivo de } \Rightarrow \end{aligned}$$

Objetivo: Reduzir uma expressão λ usando as regras até que ela não contenha mais β –redexes.

Exemplo:

$$(\lambda x. \lambda y. (x \ y)) (\lambda z. y)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow_{\alpha} & (\lambda x. \lambda w. (x \ w)) (\lambda z. y) & [y \rightarrow w] \\ \Rightarrow_{\beta} & \lambda w. ((\lambda z. y) \ w) & F = (\lambda x. \lambda w. (x \ w)), \\ & & A = (\lambda z. w) \\ \Rightarrow_{\beta} & \lambda w. y & F = (\lambda z. y), \\ & & A = w \end{array}$$

δ –Redução

Objetivo: Tratar valores e operações pré-definidos na simplificação de expressões λ .

Definition. δ –Redução

Uma redução em cálculo λ não-puro envolvendo avaliação de operações e valores pré-definidos é chamada δ –Redução.

Exemplos:

$$(add\ 3\ 5) \Rightarrow_{\delta} 8$$

$$(not\ true) \Rightarrow_{\delta} false$$

$$Twice(\lambda n. (add\ n\ 1))\ 5$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\lambda f. \lambda x. (f\ (f\ x))) (\lambda n. (add\ n\ 1))\ 5 \\ &\Rightarrow_{\beta} (\lambda x. ((\lambda n. (add\ n\ 1)) ((\lambda n. (add\ n\ 1))x)))\ 5 \\ &\Rightarrow_{\beta} (\lambda n. (add\ n\ 1)) ((\lambda n. (add\ n\ 1))\ 5) \\ &\Rightarrow_{\beta} (add\ ((\lambda n. (add\ n\ 1))\ 5)\ 1) \\ &\Rightarrow_{\beta} (add\ (add\ 5\ 1)\ 1) \\ &\Rightarrow_{\delta} 7 \end{aligned}$$

Estratégias de Redução

Definition. Uma expressão λ está em **forma normal** se ela não contém β -redexes (e nenhuma regra- δ pode ser aplicada no cálculo com valores pré-definidos), tal que esta expressão não pode mais ser reduzida usando regras β ou δ .

Exemplos:

x

$(a\ b)$

$(\lambda x. (x\ y))$

35

$\Rightarrow$ Toda expressão λ pode ser reduzida a uma forma normal? NÃO.

$(\lambda x. x\ x)\ (\lambda x. x\ x)$

$\Rightarrow_{\beta} (\lambda x. x\ x)\ (\lambda x. x\ x)$

$\Rightarrow_{\beta} (\lambda x. x\ x)\ (\lambda x. x\ x) \Rightarrow_{\beta} \dots$

Estratégias de Redução

⇒ Pode existir mais de uma maneira de reduzir uma expressão λ ? SIM.

$$(\lambda x. \lambda y. (add\ y\ ((\lambda z. (mul\ x\ z))\ 3)))\ 7\ 5$$

Caminho 1:

$$(\lambda \textcolor{red}{x}. \lambda y. (add\ y\ ((\lambda z. (mul\ x\ z))\ 3)))\ \textcolor{red}{7}\ 5$$

$$\Rightarrow_{\beta} (\lambda \textcolor{red}{y}. (add\ y\ ((\lambda z. (mul\ 7\ z))\ 3)))\ \textcolor{red}{5}$$

$$\Rightarrow_{\beta} (add\ 5\ ((\lambda \textcolor{red}{z}. (mul\ 7\ z))\ \textcolor{red}{3}))$$

$$\Rightarrow_{\beta} (add\ 5\ \textcolor{red}{mul\ 7\ z})\ 3))$$

$$\Rightarrow_{\delta} (\textcolor{red}{add\ 5\ 21}) \Rightarrow_{\delta} 26$$

Caminho 2:

$$(\lambda x. \lambda y. (add\ y\ ((\lambda \textcolor{red}{z}. (mul\ x\ z))\ \textcolor{red}{3})))\ 7\ 5$$

$$\Rightarrow_{\beta} (\lambda \textcolor{red}{x}. \lambda y. (add\ y\ (mul\ x\ 3)))\ \textcolor{red}{7}\ 5$$

$$\Rightarrow_{\beta} (\lambda \textcolor{red}{y}. (add\ y\ (mul\ 7\ 3)))\ \textcolor{red}{5}$$

$$\Rightarrow_{\delta} (\lambda y. (add\ y\ 21))\ 5$$

$$\Rightarrow_{\beta} (\textcolor{red}{add\ 5\ 21}) \Rightarrow_{\delta} 26$$

$$(\lambda y. 5)\ ((\lambda x. x\ x)\ (\lambda x. x\ x))$$

Teorema de Church-Rosser

⇒ Se existe mais de uma estratégia de redução para uma expressão, elas irão conduzir à mesma forma normal?
SIM.

Theorem. Church-Rosser I

Sejam E , F e G expressões λ . Se $E \Rightarrow^ F$ e $E \Rightarrow^* G$ então existe uma expressão λZ tal que $F \Rightarrow^* Z$ e $G \Rightarrow^* Z$.*

Corollary. *Sejam M , N e E expressões λ . Se $E \Rightarrow^* M$ e $E \Rightarrow^* N$ e M e N estão em forma normal, M e N são equivalentes com respeito à α -redução.*

Proof. O único tipo de redução possível para expressões em forma normal é a α -redução. Por isso, a expressão Z do teorema deve ser uma variante de M e N somente através de α -redução. $\square$

Tese de Church: As funções efetivamente computáveis sobre os números inteiros positivos são precisamente as funções que podem ser definidas no cálculo lambda puro (e computáveis por máquinas de Turing).