Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

INF05010 – Otimização combinatória
2013/1
Prof. Marcus Ritt

Nome:
Cartão:

Prova técnicas de busca heurística

Questão 1 (Heurísticas por construção e modificação, 4pt)
Considere o problema do corte máximo: dado um grafo não-direcionado $G = (V, A)$, queremos encontrar uma partição $V = V_1 \dot\cup V_2$ dos vértices, tal que a cardinalidade do corte correspondente $C(V_1, V_2) = A \cap \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ é maximizado.

a) Supõe que temos uma heurística construtiva que começa com o corte $C(\emptyset, V)$ e move gulosamente um vértice de V_2 para V_1 até conseguir mover nenhum vértice mais sem aumentar o corte. Qual o resultado dessa heurística no grafo da figura 1? Escolhe o vértice de menor índice em caso de empates.

b) Propõe uma modificação que torna o algoritmo do item anterior semi-guloso com um parâmetro $\alpha \in (0, 1)$ que define a gulosidade. Qual o resultado da aplicação desse algoritmo $\alpha = 0.5$?

c) Supõe uma vizinhança que troca dois vértices de partes diferentes. Qual o resultado de uma busca local "melhor melhora" nessa vizinhança (em caso de empate escolhe o primeiro par de vértices (v_1, v_2) em ordem lexicográfico de $\min\{v_1, v_2\}$,$\max\{v_1, v_2\}$ para a troca)?

d) A vizinhança do item anterior é simétrica? fracamente otimamente conectada? exata? Justifique.

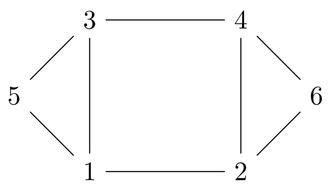

Figura 1: Exemplo de um grafo para a questão 1.

Questão 2 (Busca tabu e tempera simulada, 3pt)
Considere o problema de otimização

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 3x_5 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq 5 \\ & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 \geq 7 \\ & x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

a) Seja $x = (0, 0, 1, 1, 0)^t$ a solução atual de uma busca tabu e $L = \{(x_3, 0), (x_5, 1)\}$ a lista tabu atual. Caso $(x, v) \in L$, a variável x não pode assumir o valor v. Qual o melhor vizinho viável x' não-tabu numa vizinhança 1-flip, e qual seria o novo elemento da lista tabu depois do movimento?

b) Qual seria a probabilidade num algoritmo de tempera simulada de aceitar o vizinho x' do item interior, caso a temperatura atual é $T = 3$ (com $k = 1$)? Qual seria a temperatura necessária para aceitar x' com probabilidade $1/e^2$?

Questão 3 (Testes estatísticos, 3pt)
Três heurísticas foram aplicadas em dez instâncias de um problema de minimização até encontrar um valor perto da otimalidade (para um dado limite inferior). Os tempos de execução foram

Instância	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo heurística 1	8.1	5.4	5.9	4.9	5.8	4.2	6.3	5.6	5.7	6.3
Tempo heurística 2	5.5	5.2	6.7	5.5	4.9	4.7	6.2	4.1	6.2	4.6
Tempo heurística 3	4.6	5.7	6.6	4.8	4.3	4.3	5.1	5.0	4.1	4.1

a) Qual o valor p (p-value) de um teste de sinal de Wilcoxon comparando os tempos de execução das primeiras duas heurísticas com a hipótese nula que os tempos são iguais e a hipótese alternativa que a heurística 1 precisa um tempo maior que heurística 2? Podemos concluir que a heurística 1 é melhor que heurística 2 com um nível de significância de 0.05?

b) O que seria um teste adequado para decidir se os efeitos das três heurísticas são iguais ou não? Justifique brevemente.

Questão 4 (MAX-SAT, 4pt)
Considera a instância

$$(x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$
$$\wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4)$$

do problema MAX-SAT. Para uma vizinhança 1-flip, qual o número de soluções isoladas, máximos locais (estritos), plateaus, mínimos locais (estritos), declives, e patamares? Qual a probabilidade a priori de uma solução aleatória ser um máximo local (estrito ou não)? A correlação entre qualidade e distância (Hamming) para a solução ótima mais perta é positiva ou negativa?

Fórmulas e tabelas Caso for necessário, use a sequência

14, 15, 92, 65, 35, 89, 79, 32, 38, 46, 26, 43, 38, 32, 79, 50, 28, 84, 19, 71, 69, 39, 93, 75, 10, 58, 20, 97, 49, 44, 59, 23, 07, 81, 64, 06, 28, 62

para gerar números aleatórios.

- Para gerar um número aleatório real em $[0, 1]$ divido o número por 100. Exemplo (1o número): 0.14.
- Para gerar um número aleatório inteiro em $[0, n[$ para $n < 100$ calcula o modulo por n: Exemplo (1o número): com $n = 3$ obtemos 2.

A tabela da distribuição binomial $B(k; n, p)$ para $n = 10$, $p = 0.5$ é

k	0/10	1/9	2/8	3/7	4/6	5
$P[X = k]$	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246
$P[X \geq k]$	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623
k	6	7	8	9	10	
$P[X \geq k]$	0.377	0.172	0.055	0.011	0.001	

A covariância de duas variáveis aleatórias X e Y é

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])E[Y - E[Y]] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

A variança de uma variável aleatória X é a covariança com si mesmo

$$\sigma(X) = \text{cov}(X, X) = E[X^2] - E[X]^2$$

e o seu *desvio padrão* é $\sigma(X) = \sqrt{\text{cov}(X)}$. A *correlação* entre duas variáveis aleatórias é a covariança normalizada

$$\rho(X, Y) = \text{cov}(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y)).$$