Nome:
Cartão:

Prova "Técnicas de busca heurística"

Para uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, o problema de programação quadrática binária irrestrita (unconstrained binary quadratic programming, UBQP) é maximizar x^tQx, para um vetor $x \in \{0,1\}^n$. Considere a instância com

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 8 & 7 \\ 4 & 8 & -10 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Questão 1 (Analise de paisagem de otimização, 2pt)
Para a instância do UBQP acima e uma vizinhança 1-flip, qual o número de soluções isoladas, máximos locais (estritos), plateaus, mínimos locais (estritos), declives, e patamares? Qual a probabilidade a priori de uma solução aleatória ser um máximo local (estrito ou não)? A correlação entre qualidade e distância (Hamming) para a solução ótima mais perta é positiva ou negativa?

Questão 2 (Heurísticas construtivas, 4pt)
Supõe um algoritmo construtivo guloso que começa com $x = (1/2\ \ 1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)^t$ e, em cada passo, fixa uma das variáveis ainda não fixadas x_k no valor $v \in \{0,1\}$ que maximiza x^tQx.

a) Qual a solução gulosa obtida por uma aplicação direta do algoritmo?

b) Qual a solução obtida usando uma estratégia guloso-k, com $k = 3$?

Questão 3 (Heurísticas por modificação da solução, 3pt)
Supõe que queremos resolver o UBQP acima com uma busca local iterada na vizinhança 1-flip.

a) Qual o primeiro mínimo local de uma busca local "melhor melhora" para partindo da solução inicial $x = (0\,0\,0\,0)^t$?

b) Aplique uma perturbação com um 1-flip aleatório na solução obtida. Qual a nova solução e o seu valor?

c) Qual o segundo mínimo local de uma busca local "melhor melhora" a partir da nova solução do item anterior?

Questão 4 (Heurísticas por recombinação, 3pt)
Aplique uma estratégia de evolução $(1+2)$ ao UBQP. Inicia com uma solução aleatória. Aplique como mutação um 1-flip em cada variável com probabilidade 1/3. Termine depois de 3 gerações.

Questão 5 (Testes estatísticos, 2pt)
Supõe que queremos comparar as diferentes heurísticas das questões anteriores. Descreve um plano de teste adequado, incluindo a descrição dos experimentos a serem feitos, as hipóteses, e os métodos estatísticos adequadas para conduzir a avaliação.

Fórmulas e tabelas Caso for necessário, use a sequência

14, 15, 92, 65, 35, 89, 79, 32, 38, 46, 26, 43, 38, 32, 79, 50, 28, 84, 19, 71, 69, 39, 93, 75, 10, 58, 20, 97, 49, 44, 59, 23, 07, 81, 64, 06, 28, 62

para gerar números aleatórios.

- Para gerar um número aleatório real em $[0, 1]$ divide o número por 100. Exemplo (1o número): 0.14.
- Para gerar um número aleatório inteiro em $[0, n[$ para $n < 100$ calcula o modulo por n: Exemplo (1o número): com $n = 3$ obtemos 2.

A tabela da distribuição binomial $B(k; n, p)$ para $n = 10$, $p = 0.5$ é

k	0/10	1/9	2/8	3/7	4/6	5
$P[X = k]$	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246
$P[X \geq k]$	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623
k	6	7	8	9	10	
$P[X \geq k]$	0.377	0.172	0.055	0.011	0.001	

A covariância de duas variáveis aleatórias X e Y é

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])E[Y - E[Y]] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

A variança de uma variável aleatória X é a covariança com si mesmo

$$\sigma(X) = \text{cov}(X, X) = E[X^2] - E[X]^2$$

e o seu *desvio padrão* é $\sigma(X) = \sqrt{\text{cov}(X)}$. A *correlação* entre duas variáveis aleatórias é a covariança normalizada

$$\rho(X, Y) = \text{cov}(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y)).$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x^tQx	x_1	x_2	x_3	x_4	x^tQx
0	0	0	0	0	1	0	0	0	-6
0	0	0	1	-4	1	0	0	1	2
0	0	1	0	-10	1	0	1	0	-22
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	-4	1	1	0	0	-12
0	1	0	1	6	1	1	0	1	10
0	1	1	0	2	1	1	1	0	-12
0	1	1	1	26	1	1	1	1	24

x_1	x_2	x_3	x_4	x^tQx	x_1	x_2	x_3	x_4	x^tQx	x_1	x_2	x_3	x_4	x^tQx
0	0	0	0.5	-1.0	0.5	0	0.5	0	-5.5	0.5	1	1	0.5	12.5
0	0	0.5	0	-2.5	0.5	0	0.5	0.5	0.0	0.5	1	1	1	26.5
0	0	0.5	0.5	0.0	0.5	0	0.5	1	3.5	1	0	0	0.5	-1.0
0	0	0.5	1	0.5	0.5	0	1	0	-14.5	1	0	0.5	0	-11.5
0	0	1	0.5	-4.0	0.5	0	1	0.5	-5.5	1	0	0.5	0.5	-3.0
0	0.5	0	0	-1.0	0.5	0	1	1	1.5	1	0	0.5	1	3.5
0	0.5	0	0.5	1.5	0.5	0.5	0	0	-3.0	1	0	1	0.5	-10.0
0	0.5	0	1	2.0	0.5	0.5	0	0.5	2.5	1	0.5	0	0	-8.0
0	0.5	0.5	0	0.5	0.5	0.5	0	1	6.0	1	0.5	0	0.5	0.5
0	0.5	0.5	0.5	6.5	0.5	0.5	0.5	0	-3.0	1	0.5	0	1	7.0
0	0.5	0.5	1	10.5	0.5	0.5	0.5	0.5	6.0	1	0.5	0.5	0	-9.5
0	0.5	1	0	-3.0	0.5	0.5	0.5	1	13.0	1	0.5	0.5	0.5	2.5
0	0.5	1	0.5	6.5	0.5	0.5	1	0	-8.0	1	0.5	0.5	1	12.5
0	0.5	1	1	14.0	0.5	0.5	1	0.5	4.5	1	0.5	1	0	-16.0
0	1	0	0.5	2.0	0.5	0.5	1	1	15.0	1	0.5	1	0.5	-0.5
0	1	0.5	0	1.5	0.5	1	0	0	-6.5	1	0.5	1	1	13.0
0	1	0.5	0.5	11.0	0.5	1	0	0.5	2.5	1	1	0	0.5	0.0
0	1	0.5	1	18.5	0.5	1	0	1	9.5	1	1	0.5	0	-9.5
0	1	1	0.5	15.0	0.5	1	0.5	0	-2.5	1	1	0.5	0.5	6.0
0.5	0	0	0	-1.5	0.5	1	0.5	0.5	10.0	1	1	0.5	1	19.5
0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	1	0.5	1	20.5	1	1	1	0.5	7.0
0.5	0	0	1	0.5	0.5	1	1	0	-3.5					