

Nome:
Cartão:

Prova “Técnicas de busca heurística”

Para uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, o problema de programação quadrática binária irrestrita (unconstrained binary quadratic programming, UBQP) é maximizar $x^t Q x$, para um vetor $x \in \{0, 1\}^n$. Considere a instância com

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & 4 & 1/2 \\ -2 & 5 & 0 & -3.5 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 3.5 \\ 4 & -3.5 & 0 & -5 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 3.5 & -1/2 & -3 \end{pmatrix}$$

Questão 1 (Busca heurística em geral, 2pt)

O que afirma o “no free lunch theorem” de Wolpert & McReady? Explica de forma breve, mas concreta e precisa o teorema.

Questão 2 (Vizinhanças, 1.5pt)

Considera o problema da cobertura mínima por vértices: dado um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ uma cobertura $C \subseteq V$ é um conjunto de vértices tal que $C \cap a \neq \emptyset$ para toda aresta $a \in A$ (aqui uma aresta não-direcionada é representada pelo conjunto dos dois vértices incidentes). A vizinhança sobre conjuntos factíveis que adiciona ou remove um vértice de C é conectada? Fracamente otimamente conectada? Exata?

Questão 3 (Testes estatísticos, 2pt)

O valor das soluções $x^t Q x$ para $x = (0 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^t$ é significativamente menor que os valores correspondentes para $x = (1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^t$ de acordo com um teste de sinal, para um nível de significância $\alpha = 0.05$?

Questão 4 (Busca por recombinação, 2pt)

Qual o resultado de um path relinking entre $x = (11111)^t$ e $x' = (00101)^t$ usando uma estratégia de selecionar um vizinho aleatório?

Questão 5 (Busca por construção, 3pt)

Propõe um algoritmo por otimização por colônias de formigas para o UBQP. Define os elementos principais do algoritmo e dá um exemplo com duas formigas, e uma atualização dos feromônios entre eles.

Questão 6 (Busca por modificação, 2pt)

Suponha que temos um algoritmo usando Simulated Annealing para o UBQP que gera um vizinho aleatório por trocar cada bit independentemente com probabilidade $p = 0.1$. Dado a solução atual $x = (11011)^t$ e temperatura $T = 1$, qual a probabilidade da próxima solução ser a solução ótima ou a solução de menor valor?

Questão 7 (Otimização multi-objetivo, 1.5pt)

Identifica na Figura 1 a fronteira eficiente, as soluções não-suportadas, o ponto utópico e o Nadir.

Fórmulas e tabelas Caso for necessário, use a sequência

14, 15, 92, 65, 35, 89, 79, 32, 38, 46, 26, 43, 38, 32, 79, 50, 28, 84, 19, 71, 69, 39, 93, 75, 10, 58, 20, 97, 49, 44, 59, 23, 07, 81, 64, 06, 28, 62

para gerar números aleatórios.

- Para gerar um número aleatório real em $[0, 1]$ divide o número por 100. Exemplo (1o número): 0.14.
- Para gerar um número aleatório inteiro em $[0, n[$ para $n < 100$ calcula o modulo por n : Exemplo (1o número): com $n = 3$ obtemos 2.

A tabela da distribuição binomial $B(k; n, p)$ para $n = 16$, $p = 0.5$ é

k_1/k_2	0/16	1/15	2/14	3/13	4/12	5/11	6/10	7/9	8
$P[X = k_1] = P[X = k_2]$	0.00002	0.00024	0.00183	0.00854	0.02777	0.06665	0.12219	0.17456	0.19638
$P[X \leq k_1]$	0.00002	0.00026	0.00209	0.01064	0.03841	0.10506	0.22725	0.40181	0.59819
k	9	10	11	12	13	14	15	16	
$P[X \leq k]$	0.77275	0.89494	0.96159	0.98936	0.99791	0.99974	0.99998	1.00000	

A covariância de duas variáveis aleatórias X e Y é

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])E[Y - E[Y]]] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

A variância de uma variável aleatória X é a covariância com si mesmo

$$\sigma(X) = \text{cov}(X, X) = E[X^2] - E[X]^2$$

e o seu *desvio padrão* é $\sigma(X) = \sqrt{\text{cov}(X)}$. A *correlação* entre duas variáveis aleatórias é a covariância normalizada

$$\rho(X, Y) = \text{cov}(X, Y) / (\sigma(X)\sigma(Y)).$$

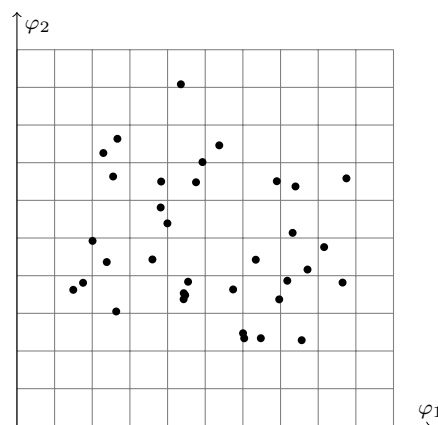


Figura 1: Soluções de um problema bi-objetivo.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x^t Q x$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x^t Q x$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-5
0	0	0	0	1	-3	1	0	0	0	1	-7
0	0	0	1	0	-5	1	0	0	1	0	-2
0	0	0	1	1	-9	1	0	0	1	1	-5
0	0	1	0	0	-3	1	0	1	0	0	-2
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	-8	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	-5	1	0	1	1	1	5
0	1	0	0	0	5	1	1	0	0	0	-4
0	1	0	0	1	4	1	1	0	0	1	-4
0	1	0	1	0	-7	1	1	0	1	0	-8
0	1	0	1	1	-9	1	1	0	1	1	-9
0	1	1	0	0	2	1	1	1	0	0	-1
0	1	1	0	1	8	1	1	1	0	1	6
0	1	1	1	0	-10	1	1	1	1	0	-5
0	1	1	1	1	-5	1	1	1	1	1	1