Exercícios 4

Exercício 1.1 (Método Simplex)
Quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas em relação ao método Simplex. Justifique a resposta brevemente.

(a) Se o método Simplex entra num ciclo, então uma solução básica degenerada se repete.

(b) Se um dicionário não é degenerado, então a variável entrante e a variável sainte são determinados univocamente.

(c) O número de soluções ótimas de um programa linear sempre é finito.

Exercício 1.2
Prove ou mostre um contra-exemplo.
O problema $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ possui uma solução viável sse $\min\{x_0 \mid Ax - ex_0 \leq b\}$ possui uma solução viável com $x_0 = 0$. Observação: e é um vetor com todos compentes igual 1 da mesma dimensão que b.

Exercício 1.3
Prove ou mostre um contra-exemplo.
Se x é a variável sainte em um pivô, x não pode ser variável entrante no pivô seguinte.

Exercício 1.4 (Formulação)
A UFRGS tem um supercomputador para os professores, alunos de doutorado e mestrado. Nas horas de trabalho, um operador tem que estar presente para operar a máquina e também para fazer algumas implementações. O Luis Otávio gerencia toda operação. No começo de cada semestre, ele tem a tarefa da alocar as horas de trabalho a cada operador. Como todos operadores também são estudantes da UFRGS, eles podem trabalhar somente um número limitado de horas por dia. A seguinte tabela mostra a disponibilidade

Nome	Salário [R$/h]	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
P.V.	10.00	6	0	6	0	6
K.O.	10.10	0	6	0	6	0
F.K.	9.90	4	8	4	0	4
S.C.	9.80	5	5	5	0	5
N.R.	10.80	3	0	3	8	0
F.T.	11.30	0	0	0	6	2

Cada operador recebe um valor diferente por hora, conforme a sua experiência e capacidade de programação. O Luis Otávio garante um número mínimo de horas por semana para cada aluno. Para os primeiros quatro, que são alunos de graduação, ele garante 8 h/semana. Para os dois restantes, que são alunos de mestrado 7 h/semana. O laboratório com o computador está aberto de 8 da manhã até 10 da noite de segunda até sexta, com exatamente um operador disponível nesse período. O Luis Otávio quer minimizar os gastos com os operadores. Quantas horas de trabalho ele deve atribuir para cada operador em cada dia?

Exercício 1.5 (Formulação, 25%)
A empresa VendaMax precisa alugar um estoque para os seus produtos. Ela quer planejar os alugueis dos cinco próximos meses, sabendo quanto espaço (em m^2) sejam necessários em cada mês. O preço do aluguel de espaço depende do período de aluguel, e é menos para mais meses. Portanto, pode ser econômico alugar um espaço fixo para todos cinco meses, mesmo que em alguns meses não todo espaço é usado. Do outro lado, pode ser mais barato alugar o espaço certo em cada mês e pagar aluguel mais alto. Outro opção seria alguma solução intermediária, em que VendaMax aluga um certo espaço para, por exemplo, dois meses, e depois troca o espaço alugado para os restantes três meses.
As necessidades de espaço e o custo de aluguel que depende do período são

Mês	Espaço necessário em m^2
1	30000
2	20000
3	40000
4	10000
5	50000

Duração de aluguel	Custo em R$ por m^2
1	65
2	100
3	135
4	160
5	190

Formule um programa linear, que determine quantos m^2 são alugados em cada mês e por qual período e que minimiza os custos de aluguel. Dica: Use variáveis x_{ij} que definem os m^2 alugados no mês i para um período de j meses.

Exercício 1.6 (Solução de programas lineares)
Resolve graficamente.

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & 500x_1 + 300x_2 \\ \textbf{s.a.}\quad & 15x_1 + 5x_2 \le 300 \\ & 10x_1 + 6x_2 \le 240 \\ & 8x_1 + 12x_2 \le 450 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & 5x_1 + 7x_2 \\ \textbf{s.a.}\quad & 2x_1 - x_2 \le -1 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Exercício 1.7 (Solução de programas lineares)
Resolva usando o método Simplex com a regra do maior coeficiente.

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \textbf{s.a.}\quad & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \textbf{s.a.}\quad & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 24 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 36 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Resolva usando a regra de Bland.

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \\ \textbf{s.a.}\quad & x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 4 \\ & x_1 - x_3 + x_4 \ge -1 \\ & 2x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ & x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & 3x_1 + x_2 \\ \textbf{s.a.}\quad & x_1 - x_2 \le -1 \\ & -x_1 - x_2 \le -3 \\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Resolva usando o método lexicográfico.

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4 \\ \textbf{s.a.}\quad & -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \le 0 \\ & 1/3x_1 + x_2 - 1/3x_3 - 2x_4 \le 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Exercício 1.8 (Solução de sistemas lineares)
Considere o programa linear

$$\begin{aligned} \textbf{max}\quad & x_1 + x_2 \\ \textbf{s.a}\quad & tx_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

com parametro $t \in \mathbb{R}$. Determine para qual valores de t o sistema

(a) possui exatamente uma solução ótima,

(b) possui um número infinito de soluções ótimas,

(c) é ilimitado, ou

(d) não possui solução.

Justifique a resposta.

Exercício 1.9 (Solução de sistemas lineares)
Considere o programa linear

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & sx_1 + tx_2 \\ \textbf{s.a} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

com parametros $s, t \in \mathbb{R}$. Determine para qual valores de s e t o sistema

(a) possui exatamente uma solução ótima,

(b) possui um número infinito de soluções ótimas,

(c) é ilimitado, ou

(d) não possui solução.

Justifique a resposta.