Lista de exercícios Dualidade e Analise de sensibilidade
Entrega: 31 de outubro de 2012

Observações:

- A solução é individual. Não entrega soluções copiadas de colegas: cada um tem que ser capaz de explicar pessoalmente, a demanda, as soluções entregadas.
- A entrega é em formato PDF por email. Um template em LaTeX é disponível na página (seção "Material"). Scans de textos escritos a mão não será aceitos.
- Cada ponto obtido vale 2/10 de um ponto na segunda prova. Independente da entrega dá para conseguir 10 pontos na prova.

Exercício 1 (3 pt)
Qual o dual dos seguintes problemas?

a) O sistema

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & 4a + 5b + 6c \\ \textbf{sujeito a} \quad & a + b \geq 11 \\ & a - b \leq 5 \\ & c - a - b = 0 \\ & 7a \geq 35 - 12b \\ & a, b, c \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

b) A formulação do problema da mochila de capacidade c com um conjunto de itens I, cada item com valor p_i e peso w_i:

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & \sum_{i \in I} p_i x_i \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{i \in I} w_i x_i \leq c \\ & x_i \in \mathbb{B} && \forall i \in I. \end{aligned}$$

c) A formulação do problema do fluxo s-t-máximo num grafo direcionado $G = (V, A)$ com vértice origem $s \in V$, vértice destino $t \in V$ e capacidades u_a para $a \in A$:

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & f \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} - \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} = \begin{cases} -f & \text{caso } i = s \\ f & \text{caso } i = t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} && \forall i \in V \\ & x_a \leq u_a && \forall a \in A \\ & x_a \in \mathbb{R}_+ && \forall a \in A. \end{aligned}$$

Exercício 2 (4 pt)
Para cada um dos sistemas abaixo com os dicionários ótimos correspondentes

a) determina, para os primeiros dois coeficientes da função objetivo e os primeiros dois lados direitos, em qual intervalo eles podem variar tal que a solução ótima atual continua a ser mantem-se ótima. Expressa a função objetivo em função da variação do coeficiente.

b) Para os mesmos coeficientes da função objetivo e lados direitos, determina qual a nova solução ótima, caso o valor do coeficiente é um a mais que aumento máximo determinado no item a), caso isso é possível.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\
\textbf{sujeito a}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{aligned}$$

$z =$	$695/7$	$-13/7x_5$	$-3/7x_2$	$-5/7x_7$	$-11/7x_4$
$x_1 =$	$50/7$	$-10/7x_5$	$-5/7x_2$	$+1/7x_7$	$+5/7x_4$
$x_6 =$	$325/7$	$+61/7x_5$	$+6/7x_2$	$-4/7x_7$	$-13/7x_4$
$x_3 =$	$55/7$	$+3/7x_5$	$-2/7x_2$	$-1/7x_7$	$-12/7x_4$

e

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\
\textbf{sujeito a}\quad & -x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le -5 \\
& x_1 \le 1 \\
& x_2 \le 1 \\
& x_3 \le 1 \\
& x_4 \le 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{aligned}$$

$z =$	-1	$-x_5$	$-2x_1$	$-3x_7$	$-x_8$
$x_6 =$	1		$-x_1$		
$x_2 =$	1			$-x_7$	
$x_3 =$	1				$-x_8$
$x_4 =$	1	$+1/2x_5$	$-1/2x_1$	$+1/2x_7$	$+x_8$
$x_9 =$	0	$-1/2x_5$	$+1/2x_1$	$-1/2x_7$	$-x_8$

Exercício 3 (3 pt)
Responde as seguintes perguntas. Justifique as respostas.

a) Caso a região das soluções primais é limitada, a região das soluções duais é limitada também? (Observação: uma região $V = \{x \mid Ax \le b\}$ é limitada, caso existem vetores l, u, tal que $l \le v \le u$ para todo $v \in V$; não confunde com sistemas ilimitados.)

b) Seja A uma matriz antissimmétrica (i.e. $A^t = -A$). Mostra que o dual de

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza}\quad & c^t x \\
\textbf{sujeito a}\quad & Ax \ge -c \\
& x \ge 0
\end{aligned}$$

é o mesmo sistema. Caso x^* é uma solução ótima do sistema acima, qual o valor de $c^t x^*$. Por quê?