Exercícios

Questão 1
Resolve

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & 5x_1 + 9x_2 + 23x_3, \\ \textbf{sujeito a} \quad & 20x_1 + 35x_2 + 95x_3 \geq 319, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

usando o algoritmo de planos de corte com cortes de Chvátal-Gomory.

Questão 2
Resolve

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 10x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 3/2x_4, \\ \textbf{sujeito a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x4 \leq 10, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+, \\ & x_3, x_4 \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

(Observe a restrições diferentes das variáveis). Use os seguintes regras

- Ramificar: Particione o problema usando a variável mais fracionária.
- Escolha: Use busca por profundidade para escolher um nó ativo para processar.

Questão 3
Mostra como a desigualdade válida $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ para o problema da mochila com restrição

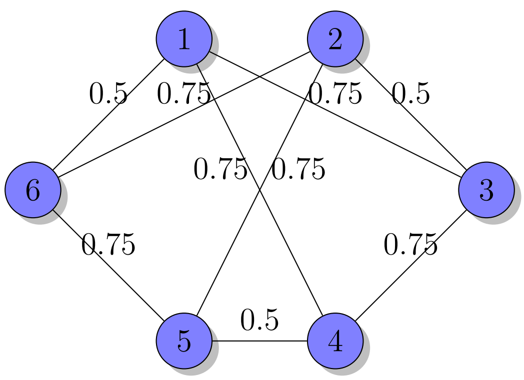
$$79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178$$

pode ser obtido via um séria de cortes de Chvátal-Gomory.

Questão 4 (Desigualdades válidas)
Seja x^*_a, $a \in A$ uma solução válida do problema do caixeiro viajante em um grafo não-direcionado $G = (V, A)$, na formulação sem eliminação de subciclos, i.e., x^* satisfaz somente

$$\sum_{a \in N(v)} x_a = 2 \qquad \forall v \in V$$

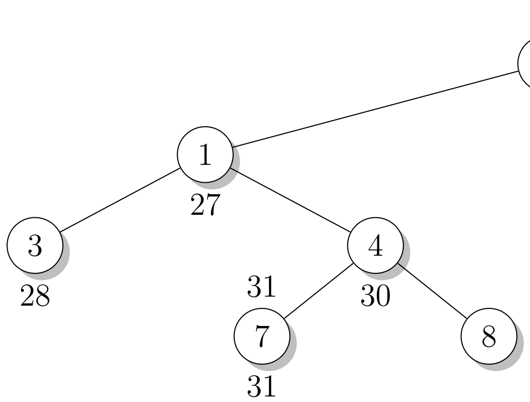
Um exemplo de uma solução fracionária válida é



Encontra uma desigualdade válida $\pi x \leq c$ para a instância acima que x^* não satisfaz ($\pi x^* > c$).

Questão 5 (Matrizes totalmente unimodulares)
Quantas das 81 matrizes 2×2 em $\{-1,0,1\}^{2\times 2}$ são totalmente unimodulares? Justifique.

Questão 6 (Algoritmo Branch-and-bound)
Considere a seguinte árvore parcial de busca com branch and bound de um problema de *minimização*.

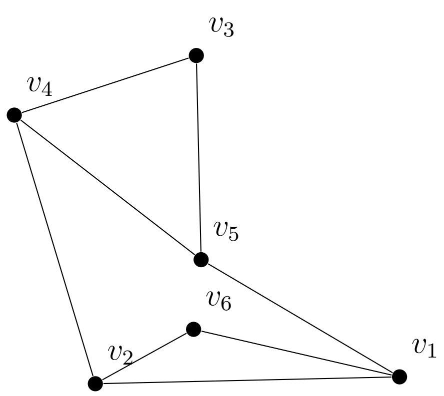


(Abaixo de cada vértice: Limite inferior da subárvore. Acima: Limite superior (solução encontrada))

a) Quais são os melhores limites inferiores e superiores da solução ótima que podem ser determindados com a informação da árvore? Justifique.

b) Quais vértices podem ser cortadados e quais tem que ser explorados mais para achar a solução ótima? Justifique e descreve o tipos de cortes aplicados.

Questão 7 (Desigualdades válidas)
Considere o problema de encontrar o emparelhamento máximo no grafo $G = (V, A)$



($V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$, $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.)
Dá duas desigualdades válidas não-dominadas (e não-triviais) para a formulação

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & \sum_{a \in A} x_a, \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{a \in N(v)} x_a \leq 1, && \forall v \in V, \\ & x_a \in \{0, 1\}, && \forall a \in A. \end{aligned}$$

Questão 8 (Algoritmo de Gomory)

A solução da relaxação linear de

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & x_1 + 4x_2, \\ \textbf{sujeito a} \quad & 5x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

é

$z =$	$548/31$	$-11/31x_3$	$-12/31x_4$
$x_1 =$	$48/31$	$-3/31x_3$	$+8/31x_4$
$x_2 =$	$125/31$	$-2/31x_3$	$-5/31x_4$

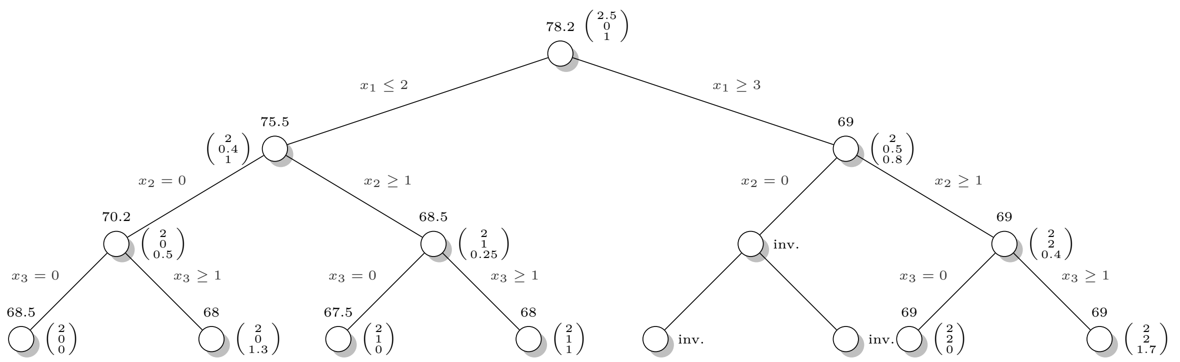
a) Em quais linhas podemos aplicar um corte?

b) Determine o corte para toda linha identificada no item a).

c) Para cada corte do item b): qual seria o próximo pivô do algoritmo de Gomory depois de adicionar o corte no sistema? (Não é necessário executar o pivô.)

Questão 9 (Branch-and-bound)

Uma busca exaustiva para a solução máxima inteira de um programa inteiro gerou (até nível 3) a seguinte árvore de busca:



Do lado direito dos nós da árvore está escrito a solução $x = (x_1 x_2 x_3)^t$ da relaxação linear e em cima dos nós o valor correspondente (com o valor "inf" para um problema inviável). Supõe que nessa árvore de busca seria aplicado um algoritmo de Branch-and-Bound com busca por profundidade, processando os filhos de um nó da esquerda para direita. Quais cortes seriam aplicadas? Escreve a ordem de processamento dos nós, marca todos cortes na árvore e justifique o tipo de corte aplicado.

Questão 10 (Matrizes totalmente unimodulares)
Caso a matriz $(A\ B)$ é totalmente unimodular, para matrizes A e B, então

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

também é? Justifique.