Soluções: Formulação de IPs.

Questão 1 (Investimentos)

Sejam $x_i \in \mathbb{B}$, $i \in P = [7]$ variáveis booleanas, que determinem em quais projetos a empresa vai investir. Seja l_i o lucro do projeto i.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{i \in P} l_i x_i \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{i \in P} x_i \leq 6, && \text{Não investir em todos projetos} \\
& \sum_{i \in P} x_i \geq 1, && \text{Investir em ao menos um projeto} \\
& x_1 \leq 1 - x_3, && \text{Projeto 1 somente se não projeto 3} \\
& x_4 \leq x_2, && \text{Projeto 4 somente se projeto 2} \\
& x_1 = x_5, && \text{Ambos 1 e 5 ou nenhum} \\
& x_i \in \mathbb{B}, \qquad \forall i \in P.
\end{aligned}$$

Questão 2 (Formulação de Programas Inteiros)

Cobertura por arcos

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \geq 1, && \forall v \in V, \\
& x_e \in \mathbb{B}.
\end{aligned}$$

Conjunto dominante de arcos

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{\substack{e' \in E \\ e \cap e' \neq \emptyset}} x_{e'} \geq 1, && \forall e \in E, \\
& x_e \in \mathbb{B}.
\end{aligned}$$

Coloração de grafos Seja $n = |V|$; uma coloração nunca precisa mais que n cores.

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{j\in[n]} c_j \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j\in[n]} x_{vj} = 1, && \forall v \in V, && (1) \\
& x_{ui} + x_{vi} \le 1, && \forall \{u,v\} \in E, i \in [n], && (2) \\
& nc_j \ge \sum_{v\in V} x_{vj}, && \forall j \in [n], && (3) \\
& x_{vi}, c_j \in \mathbb{B}.
\end{aligned}
$$

- Restrição (1) garante que todo vértice recebe exatamente uma cor.
- Restrição (2) garante que vértices adjacentes recebem cores diferentes.
- Restrição (3) garante que $c_j = 1$ caso cor j for usada.

Clique mínimo ponderado

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{v\in V} c_v x_v \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_u + x_v \le 1, && \forall \{u,v\} \notin E, && (4) \\
& x_v \in \mathbb{B}.
\end{aligned}
$$

Restrição 4 garante que não existe um par de vértices selecionados que não são vizinhos.

Subgrafo cúbico x_e indica a seleção da aresta $e \in E$, e y_v indica se o vértice $v \in V$ ele possui grau 0 (caso contrário grau 3).

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{e\in E} x_e \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{e\in N(v)} x_e = 3y_v, && \forall v \in V, \\
& x_e \in \mathbb{B}, && \forall e \in E, \\
& y_v \in \mathbb{B}, && \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

Questão 3 (Formulação Matemática)
Seja $x_{ijk} \in \mathbb{B}$ um indicador que na casa da linha i e coluna j temos o número k,

$1 \le i, j, k \le 5$. Com isso temos

$$
\begin{array}{rlrr}
\textbf{maximiza} & \sum_k k x_{11k} & & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_k x_{ijk} = 1 & \forall i, j & \text{Único número em cada casa} \\
& \sum_j x_{ijk} = 1 & \forall i, k & \text{Digito } k \text{ uma vez na linha } i \\
& \sum_i x_{ijk} = 1 & \forall j, k & \text{Digito } k \text{ uma vez na coluna } j \\
& \sum_k k x_{11k} \ge \sum_k k x_{12k} + 1 & & \text{Relação entre (1,1) e (1,2)} \\
& \sum_k k x_{13k} \ge \sum_k k x_{14k} + 1 & & \text{Relação entre (1,3) e (1,4)} \\
& \sum_k k x_{33k} \le \sum_k k x_{34k} - 1 & & \text{Relação entre (3,3) e (3,4)} \\
& \sum_k k x_{51k} \le \sum_k k x_{52k} - 1 & & \text{Relação entre (5,1) e (5,2)} \\
& \sum_k k x_{54k} \le \sum_k k x_{55k} - 1 & & \text{Relação entre (5,4) e (5,5)} \\
& x_{ijk} \in \mathbb{B}. & &
\end{array}
$$