Nome:
Cartão:

Prova 1

Dicas gerais:

- Leia todas as questões antes de começar e pergunte em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

Questão 0.1 (Solução de sistemas lineares, 25%)
Considere o programa linear

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & sx_1 + tx_2 \\ \textbf{s.a} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

com parametros $s, t \in \mathbb{R}$. Determine para qual valores de s e t o sistema

(a) possui exatamente uma solução ótima,

(b) possui um número infinito de soluções ótimas,

(c) é ilimitado, ou

(d) não possui solução.

Justifique a resposta.

Questão 0.2 (Formulação, 25%)
A empresa "Trisabor" vende pão para baurus e baurus completos. Ela possui uma produção própria de 200 kg/semana de farinha para o pão. Cada pão precisa 0.1 kg. Trisabor contratou BoiBom S.A., que fornece 800 kg de carne cada segunda. Cada bauru precisa 0.125 kg de carne. Todos outros ingredientes são disponíveis suficientemente. Trisabor tem 5 funcionários que trabalham 40 horas por semana. Cada pão precisa 2 minutos de trabalho e cada bauru completo 3 minutos. Cada bauru vendido lucre 20 centavos, e cada pão 10 centavos. Formule um programa linear, que determine o número de pães e baurus completos produzidos por semana que maximiza o lucro (não considerando restrições de integralidade).

Questão 0.3 (Formulação, 25%)
A empresa VendaMax precisa alugar um estoque para os seus produtos. Ela quer planejar os alugueis dos cinco próximos meses, sabendo quanto espaço (em m^2) sejam necessários em cada mês. O preço do aluguel de espaço depende do período de aluguel, e é menos para mais meses. Portanto, pode ser econômico alugar um espaço fixo para todos cinco meses, mesmo que em alguns meses não todo espaço é usado. Do outro lado, pode ser mais barato alugar o espaço certo em cada mês e pagar aluguel mais alto. Outro opção seria alguma solução intermediária, em que VendaMax aluga um certo espaço para, por exemplo, dois meses, e depois troca o espaço alugado para os restantes três meses.
As necessidades de espaço e o custo de aluguel que depende do período são

Mês	Espaço necessário em m^2
1	30000
2	20000
3	40000
4	10000
5	50000

Duração de aluguel	Custo em R$ por m^2
1	65
2	100
3	135
4	160
5	190

Formule um programa linear, que determine quantos m^2 são alugados em cada mês e por qual período e que minimiza os custos de aluguel. Dica: Use variáveis x_{ij} que definem os m^2 alugados no mês i para um período de j meses.

Questão 0.4 (Método Simplex, 25%)
Considere o programa linear

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & -5x_1 - 3x_2 \\ \textbf{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 15 \\ & x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Qual o sistema dual correspondente?

(b) Resolva o sistema usando o método Simplex (escolhe uma variante adequada e documenta a escolha).

(c) Qual a solução ótima do sistema primal? Qual o valor correspondente da função objetivo?

(d) Qual a solução ótima do sistema dual? Qual o valor correspondente da função objetivo?

Questão 0.5 (Análise de sensitividade, 25%)
A solução do sistema

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ \textbf{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

partindo do dicinário inicial com variáveis de folga x_5 e x_6

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 0 & +6x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +9x_4 \\ x_5 = & 5 & -2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -3x_4 \\ x_6 = & 3 & -1x_1 & -3x_2 & -1x_3 & -2x_4 \end{array}$$

é

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 17 & -1x_5 & -2x_4 & -5x_2 & -4x_6 \\ x_1 = & 2 & -1x_5 & -1x_4 & +2x_2 & +1x_6 \\ x_3 = & 1 & +1x_5 & -1x_4 & -5x_2 & -2x_6 \end{array}$$

Em qual intervalo o coeficiente 6 da variável x_1 na função objetivo pode variar, tal que essa solução mantem-se ótima?

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$\begin{aligned} z &= z^* - (y_N^*)^t x_N \\ x_B &= x_B^* - B^{-1} N x_N \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} x_B^* &= B^{-1} b \\ y_N^* &= ((B^{-1}N)^t c_B - c_N) \\ z^* &= c_B^t B^{-1} b \end{aligned}$$