Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Leia todas as questões antes de começar e pergunte em caso de dúvidas.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: explique o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2.5pt)
Considere a grade na Figura 1a. Queremos remover seis das 16 moedas, tal que em cada linha e coluna sobre um número par de moedas. Formula um programa inteiro que consegue isso. Maximiza o número de moedas no diagonal principal.

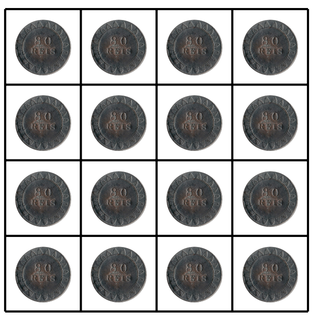
Questão 2 (Formulação, 2.5pt)
Considere a Figura 1b. Formule um programa inteiro que posiciona os números $1, \ldots, 19$ nas suas nove posições livres, tal que a soma dos números em cada das nove linhas retas passando pelo centro é 30. Maximiza o número no centro. Observe que cada número pode ser usada somente uma única vez a cada posição livre tem que ser ocupada por um número.

Questão 3 (Analise de sensibilidade, 3pt)
Lembra o problema do Moe?

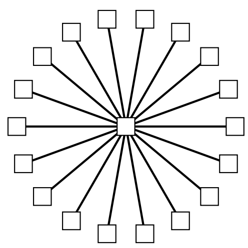
> Moe está decidindo quanta cerveja Duff regular e quanta cerveja Duff Forte encomendar a cada semana. Duff regular custa a Moe \$1 por caneco e ele a vende por \$2 por caneco; Duff Forte custa \$1.50 por caneco e ele vendo por \$3 por caneco. Entretanto, como parte de uma complicada fraude de marketing, a companhia Duff somente vende um caneco de Duff Forte para cada dois canecos ou mais de Duff regular que Moe compra. Além disso, devido a eventos passados sobre os quais é melhor nem comentar, Duff não venderá Moe mais do que 3000 canecos por semana. Moe sabe que ele pode vender tanta cerveja quanto tiver.

Uma formulação do problema, com variáveis r e f para o número de caneco de Duff regular e forte é

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & r + 1.5f \\
\textbf{sujeito a} \quad & r + f \leq 3000 \\
& -r + 2f \leq 0 \\
& r, f \in \mathbb{R}_+ .
\end{aligned}
$$



(a) Uma grade 4×4 com 16 moedas.



(b) Uma figura com 19 posições livres.

Figura 1: Examplos para as questões 1 e 2.

O dicionário ótimo da solução do sistema é

$$\begin{array}{rrrr} z = & 3500 & -7/6w_1 & -1/6w_2 \\ \hline r = & 2000 & -2/3w_1 & +1/3w_2 \\ f = & 1000 & -1/3w_1 & -1/3w_2 \end{array}$$

Moe ficou com três dúvidas.

a) Qual o intervalo de custos para um caneco de Duff regular tal que a solução atual continua ser ótima?

b) Qual o intervalo de custos para um caneco de Duff forte tal que a solução atual continua ser ótima?

c) Supõe que Moe consegue convencer a companhia Duff vender um caneco de Duff Forte para cada caneco ou mais de Duff regular. Com isso a solução atual continua ser primalmente ótima? Dualmente ótima?

Questão 4 (Dualidade, 2pt)
Um colega afirma que a solução ótima do programa linear

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & 2x_1 - x_2 + x_3, \\ \textbf{sujeito a} & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60, \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ & x_1 + x_2 - x_3 \ge 20, \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

é

$$x = 1/2 \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como evidência adicional ele ainda afirma que

$$y = 1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é a solução dual ótima. Ele tem razão? Justifique a resposta. Os teoremas de dualidade vistos em aula podem ser citados na justificativa.

Dicas:

1. Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$z = z^* - (y_N^*)^t x_N$$
$$x_B = x_B^* - B^{-1} N x_N$$

com

$$x_B^* = B^{-1} b$$
$$y_N^* = (B^{-1}N)^t c_B - c_N$$
$$z^* = c_B^t B^{-1} b$$

2. A matriz inversa de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.