Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

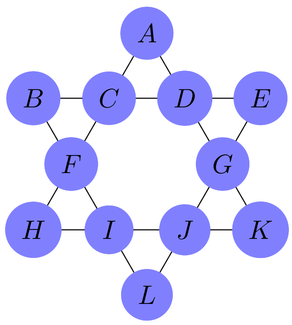
- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: documenta o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
Uma empresa foi contratada para cinco projetos, mas por problemas internas só pode concluir três. Para cada projeto não concluído ela tem que pagar uma multa. Cada projeto executado tem custos iniciais e um lucro proporcional à número de unidades produzidas. O número de unidades produzidas é decisão da empresa, até um limite de demanda. O total das unidades produzidas em todos projetos não pode ser mais que 10000. A seguinte tabela mostra os valor das multas, custos inicias, lucros por unidade e demandas para cada projeto:

Projeto	1	2	3	4	5
Multa m_i [KR$]	17	8	5	8	8
Custo inicial c_i [KR$]	5	5	7	7	8
Lucro/unidade l_i [R$]	10	11	13	17	11
Demanda [1000 unid] d_i	2	8	3	1	20

Os projetos 1 e 2 são do mesmo cliente e só podem ser executados ambos ou nenhum. O projeto 5 só pode ser executado, se o projeto 4 for executado também.
Formule um programa inteira que maximiza o lucro da empresa.

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Queremos posicionar os números $1, 2, \ldots, 12$ nos 12 vértices do grafo



tal que a soma dos números em cada das seis linhas A–H, A–K, H–K, B–E, B–L, E–L é 26. Formule um programa inteira que minimiza o número no vértice A.
Dica: Usa variáveis $x_{ij} \in \mathbb{B}$ que indicam se número $i \in \{1, \ldots, 12\}$ foi atribuído à posicão $j \in \{A, \ldots, L\}$.

Questão 3 (Formulação, 2 pt)
Formule um programa inteiro para resolver o problema MAX 3-SAT.

Questão 4 (Folgas complementares, 2 pt)
Dado o sistema

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4 \\
& -x_1 + x_3 - x_4 \leq 1 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

com solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$, usa o teorema das folgas complementares para determinar a solução dual ótima.

Questão 5 (Dualidade, 2 pt)
Uma formulação do problema de encontrar a menor uma cobertura por arcos num grafo ponderado não-direcionado $G = (V, E)$ com pesos $c : E \to \mathbb{R}$ é

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \geq 1, \qquad && \forall v \in V \\
& x_e \in \mathbb{B}.
\end{aligned}
$$

a) Qual a instância do problema e o dual da relaxação lienar no caso do grafo completo com quatro vértices e pesos unitários?

b) Qual o dual da relaxação linear do problema no caso geral?

($N(v) = \{u \mid uv \in E\}$ é o conjunto de vértices adjacentes à vértice v.)

Questão 6 (Sensibilidade, 2 pt)
A solução ótima do sistema

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10 \\
& x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 8 \\
& 2x_1 + 2x_3 \leq 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(com variáveis de folga x_4, x_5 e x_6) é

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 188/19 & -29/19x_1 & -6/19x_5 & -14/19x_4 \\
\hline
x_3 = & 32/19 & -11/19x_1 & +1/19x_5 & -4/19x_4 \\
x_2 = & 30/19 & -2/19x_1 & -5/19x_5 & +1/19x_4 \\
x_6 = & 69/19 & -16/19x_1 & -2/19x_5 & +8/19x_4
\end{array}
$$

Queremos modificar os coeficientes $1, 2, 4$ da função objetivo nas proporções $1 : 2 : 1$, i.e., obter uma solução com vetor de custos $(1\,2\,4)^t + t(1\,2\,1)^t$ para um $t \in \mathbb{R}$.

a) Em qual intervalo podemos escolher t tal que base atual mantem-se ótima?

b) Qual o novo valor da função objetivo em função de t neste intervalo?

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$z = z^* - (y_N^*)^t x_N$$
$$x_B = x_B^* - B^{-1} N x_N$$

com

$$x_B^* = B^{-1} b$$
$$y_N^* = (B^{-1}N)^t c_B - c_N$$
$$z^* = c_B^t B^{-1} b.$$