Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: explica o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2.5pt)
Considere uma extensão do problema da mochila em que o conjunto de itens I é particionado em k diferentes tipos $T_1 \dot\cup T_2 \dot\cup \cdots \dot\cup T_k = I$ de itens. Formule um programa inteiro para as seguintes restrições adicionais (separadamente):

a) Um item da classe 2 só pode ser escolhido caso pelo menos um item da classe 1 foi escolhido.

b) Temos que escolher pelo menos um item de cada classe.

Questão 2 (Dualidade, 2.5pt)
Considere o problema de sequenciamento de tarefas em máquinas paralelas idênticas ($P \mid\mid C_{\max}$): dado n tarefas com tempo de processamento t_i, $1 \le i \le n$, e m máquinas queremos encontrar uma alocação de tarefas a máquinas tal que o duração total é minimizado. A duração total é definido pelo tempo de término da última tarefa. A relaxação linear da formulação inteira desse problema é

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & C & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{1\le j\le m} x_{ij} = 1 & \forall 1 \le i \le n \\
& \sum_{1\le i\le n} t_i x_{ij} \le C & \forall 1 \le j \le m \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+ & \forall 1 \le i \le n, 1 \le j \le m \\
& C \in \mathbb{R}. &
\end{array}
$$

Qual o problema dual?

Questão 3 (Formulação, 2.5pt)
Suponha que temos uma formulação linear de um problema em variáveis $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, e queremos acrescentar as seguintes restrições:

(a) Pelo menos uma das restrições (1) e (2) tem que ser satisfeita

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 4 \tag{1}$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 3 \tag{2}$$

(b) Pelo menos duas das restrições (3)–(6) tem que ser satisfeitas

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \le 10 \tag{3}$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 10 \tag{4}$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 10 \tag{5}$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 10 \tag{6}$$

Mostra como formular essas restrições junto com as condições acima como programa inteiro (misto).

Questão 4 (Análise de sensibilidade, 2.5pt)
A solução do sistema

$$\begin{aligned} \textbf{max}.\quad & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ \textbf{s.a}\quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

partindo do dicinário inicial com variáveis de folga x_5 e x_6

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 0 & +6x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +9x_4 \\ \hline x_5 = & 5 & -2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -3x_4 \\ x_6 = & 3 & -1x_1 & -3x_2 & -1x_3 & -2x_4 \end{array}$$

é

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 17 & -1x_5 & -2x_4 & -5x_2 & -4x_6 \\ \hline x_1 = & 2 & -1x_5 & -1x_4 & +2x_2 & +1x_6 \\ x_3 = & 1 & +1x_5 & -1x_4 & -5x_2 & -2x_6 \end{array}$$

Em qual intervalo o coeficiente 6 da variável x_1 na função objetivo pode variar, tal que essa solução mantem-se ótima?

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$\begin{aligned} z &= z^* - (y_N^*)^t x_N \\ x_B &= x_B^* - B^{-1} N x_N \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} x_B^* &= B^{-1} b \\ y_N^* &= ((B^{-1}N)^t c_B - c_N) \\ z^* &= c_B^t B^{-1} b \end{aligned}$$