Nome:
Cartão:

Prova 3

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

Questão 1 (Desigualdades válidas, 3pt)
Dado um universo de elementos $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e uma família de subconjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de U com pesos positivos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, o problema de cobertura por conjuntos é encontrar uma seleção $S \subseteq [n]$ dos subconjuntos com peso total $\sum_{i \in S} p_i$ mínimo e tal que todo elemento $u \in U$ está contido em pelo menos um dos conjuntos C_i com $i \in S$. A formulação inteira do problema é

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{i \in [n]} p_i x_i, \\ \textbf{sujeito a} \quad & Ax \geq \mathbf{1}, \\ & x \in \mathbb{B}^n, \end{aligned}$$

onde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{B}^{m \times n}$ é uma matriz 0-1 com $a_{ij} = 1$ sse $u_m \in C_j$ e $1 = (1 \cdots 1)^t \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de m elementos 1.
Uma instância do problema pode ser vista na figura 1. Encontra duas desigualdades válidas não-triviais da formulação acima para essa instância. Observe que as desigualdades tem que ser válidas para qualquer seleção de pesos positivos. (Uma desigualdade válida é considerada não-trivial caso ela não tem a forma $\sum_{i \in S} x_i \leq |S|$, $\sum_{i \in S} x_i \geq 0$ ou alguma combinação linear das restrições, para uma seleção S arbitrária.)

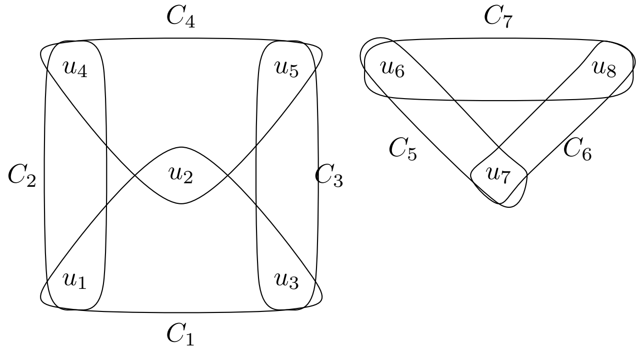

Figura 1: Exemplo de uma instância do problema de cobertura por conjuntos com $C_1 = \{u_1, u_2, u_3\}, C_2 = \{u_1, u_4\}, C_3 = \{u_3, u_5\}, C_4 = \{u_2, u_4, u_5\}, C_5 = \{u_6, u_7\}, C_6 = \{u_7, u_8\}, C_7 = \{u_6, u_8\}$.

Questão 2 (Planos de corte, 3pt)
Considere o programa inteiro

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & 9x_1 + 8x_2 + 6x_4, \\ \textbf{sujeito a}\quad & 6x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 25, \\ & 10x_1 + 13x_2 + 25x_3 + 6x_4 \leq 67, \\ & 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 11x_4 \leq 27, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

A solução ótima da sua relaxação linear é

$z =$	$1031/26$	$-19/13x_5$	$-3/26x_7$	$-205/13x_3$	$-371/26x_4$
$x_1 =$	$15/26$	$-3/13x_5$	$+5/26x_7$	$-5/13x_3$	$-23/26x_4$
$x_6 =$	$68/13$	$+17/13x_5$	$+14/13x_7$	$-15/13x_3$	$+297/13x_4$
$x_2 =$	$56/13$	$+1/13x_5$	$-3/13x_7$	$-20/13x_3$	$-20/13x_4$

(com variáveis de folga x_5, x_6, x_7.) Qual o próximo passo do algoritmo de Gomory?

a) Em quais linhas podemos aplicar um corte?

b) Determine o corte para uma das linhas do item a).

c) Qual seria o próximo pivô do algoritmo (não é necessária executar o pivô)?

d) Escreve o corte no espaço das variáveis originais.

Questão 3 (Análise de problemas, 3pt)
Queremos definir orientadores e co-orientadores de n novos mestrandos. Temos $2n$ professores e cada mestrando tem que ter (exatamente) um orientador e um co-orientador. Cada professor pode ter somente uma orientação ou co-orientação. A preferência do aluno $a \in [n]$ de ser orientado pelo professor $p \in [2n]$ é v_{ap}. Uma formulação inteira dessa problema que maximiza a soma de todas preferências é

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & \sum_{a\in[n],p\in[2n]} v_{ap}x_{ap} + v_{ap}y_{ap} & \\ \textbf{sujeito a}\quad & \sum_{p\in[2n]} x_{ap} = 1 & \forall a \in [n], \\ & \sum_{p\in[2n]} y_{ap} = 1 & \forall a \in [n], \\ & \sum_{a\in[n]} x_{ap} + y_{ap} = 1 & \forall p \in [2n], \\ & x_{ap}, y_{ap} \in \{0,1\} & \forall a \in [n], \forall p \in [2n], \end{aligned}$$

com $x_{ap} = 1$ sse professor $p \in [2n]$ é orientador do aluno a e $y_{ap} = 1$ sse p é co-orientador de a.
A relaxação linear desse problema possui soluções integrais?

Questão 4 (Branch and bound, 1pt)
Explique de forma clara a sucinta o significado de um corte por limite e um corte por otimalidade no contexto de um problema de maximização e de minimização.