Nome:
Cartão:

Prova 3

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

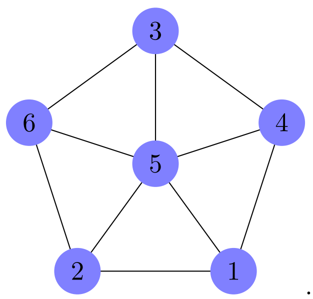
Questão 1 (Branch-and-bound, 3pt)
Aplique o método de branch-and-bound no problema

> COBERTURA POR VÉRTICES MÍNIMA
>
> **Instância** Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ com pesos $c_v \in \mathbb{Q}$ nos vértices $v \in V$.
>
> **Solução** Uma *cobertura* C, i.e. uma seleção de vértices $C \subseteq V$ tal que para cada aresta $a \in A$, $a \cap C \neq \emptyset$.
>
> **Objetivo** Minimizar $\sum_{v \in C} c_v$.

a) Define quais limites inferiores e superiores serão usados.

b) Define a estratégia de ramificar: quais os subproblemas de uma dada solução parcial?

c) Aplique o método definido acima no grafo



.

(Os números nos vértices são os pesos.) Exibe a árvore de busca e os cortes aplicados junto com os seus tipos.

Questão 2 (Matrizes totalmente unimodulares, 1.5pt)
O problema de empacotamento de conjuntos consiste em determinar o maior subconjunto de uma coleção de conjuntos $\mathcal{C}$ de um conjunto finito S, tal que nenhum par de conjuntos selecionados possui um elemento em comum. Seja $x_C \in \mathbb{B}$ uma variável que indica se o conjunto $C \in \mathcal{C}$ é selecionado. Uma formulação do problema é

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & \sum_{C \in \mathcal{C}} x_C & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{C \in \mathcal{C} \mid c \in C} x_C \leq 1 & \forall c \in S \\
 & x_C \in \mathbb{B} & \forall C \in \mathcal{C}.
\end{array}
$$

As matrizes das instâncias dessa formulação são totalmente unimodulares? Justifique.

Questão 3 (Matrizes totalmente unimodulares, 1.5pt)
Uma formulação do problema da cobertura por vértices mínima da questão 1 é

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{v \in V} c_v x_v & \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_u + x_v \geq 1 & \forall \{u, v\} \in A \\
& x_v \in \mathbb{B} & v \in V.
\end{aligned}$$

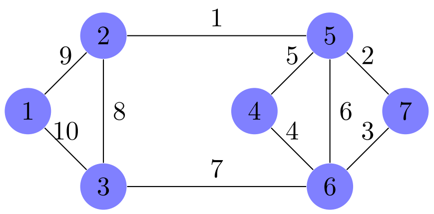
As matrizes das instâncias dessa formulação são totalmente unimodulares? Justifique.

Questão 4 (Método de Chvátal-Gomory, 1.5pt)
Considere a instância

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 3x_1 + 6x_2 + x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 17x_3 \leq 21 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{B}
\end{aligned}$$

do problema da mochila. Aplique o método de Chvátal-Gomory com multiplicador $u = 3/2$ e multiplicador $u = 2/3$ à restrição do problema para gerar duas desigualdades válidas.

Questão 5 (Matrizes totalmente unimodulares, 2pt)
Seja A a matriz de incidência entre vértices e arestas de uma grafo não-direcionado. (Para um grafo com n vértices e m arestas, a matriz de incidência possui n linhas e m colunas. Um valor 1 na posição (i, j) indica que vértice i é incidente à aresta j. Por exemplo, a matriz de incidência do grafo



é

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

As linhas e colunas da matriz são em ordem das vértices e arestas dado pelos números no grafo.)

a) Mostra que A é totalmente unimodular para grafos bipartidos.

b) Mostra que A não é totalmente unimodular para grafos não bipartidos.

Questão 6 (Desigualdades válidas, 2pt)
O problema do emparelhamento máximo é: Dado um grafo $G = (V, A)$ procuramos um subconjunto de arestas $C \subseteq A$ tal que cada vértice é incidente a no máximo uma aresta selecionada ($\delta_C(v) \leq 1$ para $v \in V$). Uma formulação do problema é

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{A} x_a & \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{\{u,v\}} \leq 1, & \forall v \in V \\
& x_a \in \mathbb{B}, & \forall a \in A.
\end{aligned}$$

Considere o grafo da questão 5 como instância do problema. Acha duas desigualdades válidas que não fazem parte das restrições da formulação do problema.