Nome:
Cartão:

Prova 3

Dicas gerais:

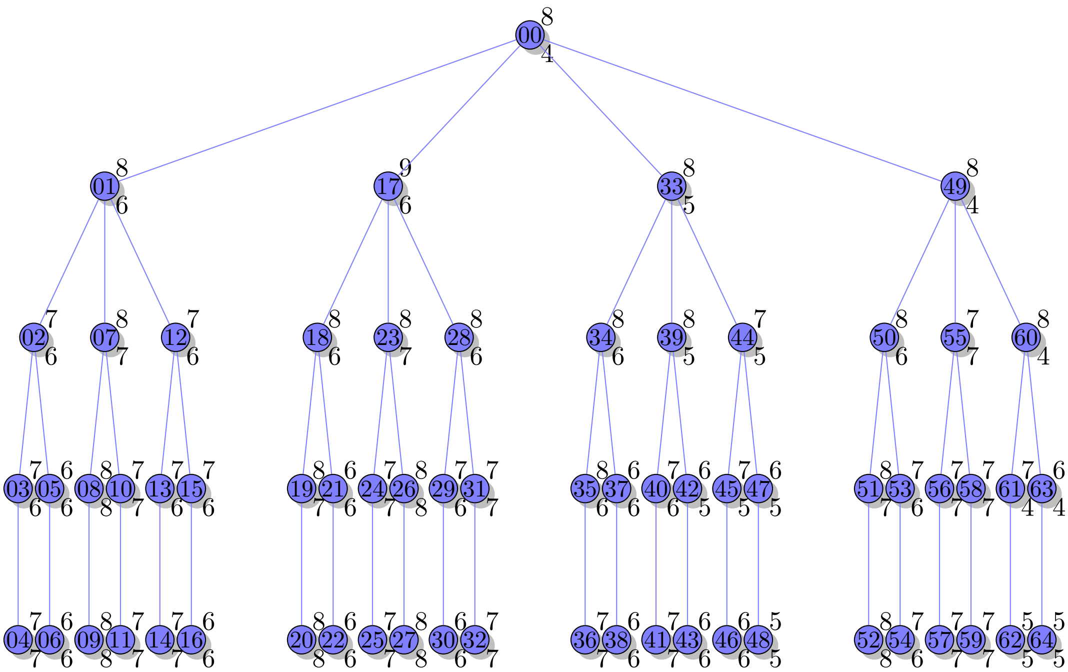
- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

Questão 1 (2 pt)
Prova ou mostre um contra-exemplo.

a) Toda matriz simétrica é totalmente unimodular. (Uma matriz A é simétrica caso $A = A^t$.)

b) Uma matriz A é totalmente unimodular se e somente se a matriz $(A \ -A)$ é totalmente unimodular.

Questão 2 (2 pt)
Um algoritmo de backtracking foi executado sobre um determinado problema de minimização e produziu a árvore de busca mostrada na imagem abaixo. Para cada nodo desta árvore, foi possível gerar um limitante superior local e um limitante inferior local (mostrados no lado superior direito e inferior direito do nodo, respectivamente).



a) Se fosse aplicado um algoritmo de branch-and-bound para o problema, supondo que os nodos são visitados na ordem $00, 01, 02, ..., 64$, quais trechos da árvore poderiam ser cortados e por quê?

b) Se a ramificação $49, 50, ..., 64$ fosse executada antes da ramificação $01, 02, ..., 16$, que cortes seriam aplicados e por quê?

Questão 3 (2 pt)
Considera os sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Mostra que os dois sistemas possuem o mesmo conjunto de soluções viáveis.

b) A matriz do primeiro sistema é totalmente unimodular? Justifique.

c) A matriz do segundo sistema é totalmente unimodular? Justifique.

Questão 4 (2 pt)
A solução da relaxação linear de

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & x_1 + 2x_2 \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 6x_1 - 4x_2 \geq 5 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 25 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

possui o dicionário ótimo

$$\begin{array}{rccc} z = & 15/2 & -1/3x_6 & -1/6x_5 \\ \hline x_1 = & 5/2 & -1/12x_6 & +1/12x_5 \\ x_4 = & 5 & -1/12x_6 & -5/12x_5 \\ x_2 = & 5/2 & -1/8x_6 & -1/8x_5 \\ x_3 = & 5 & -5/12x_6 & -1/12x_5 \end{array}$$

a) Qual o corte de Gomory correspondente com as linha x_1 do dicionário final?

b) Escreve o corte em função das variáveis x_1 e x_2.

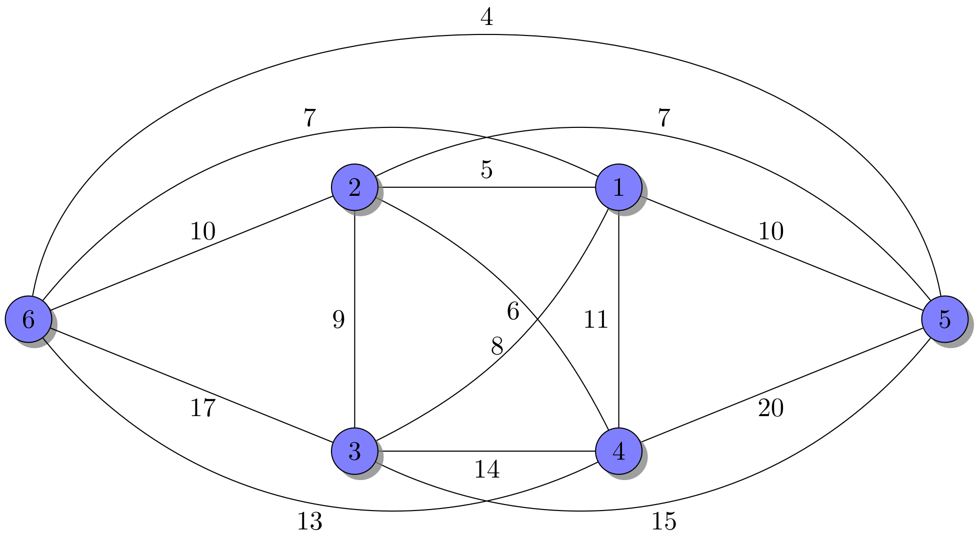
c) Insere o corte no sistema e re-otimiza o sistema usando o método Simplex dual.

Questão 5 (Problema do Vendedor Errante, 2 pt)
Para um vendedor errante, o mais importante em sua viagem é definir trechos curtos para que possa descansar adequadamente. Portanto, suponha um grafo completo G, sendo que cada aresta e tem peso w_e. O caixeiro errante deve viajar de um nodo inicial s até um nodo final t, passando por todos os demais nodos do grafo somente uma vez. A maior aresta do caminho define o maior tempo de viagem sem descanso para o caixeiro errante. Portanto, deve-se escolher o caminho que **minimiza** a maior aresta utilizada.

a) Defina os limitantes inferior e superior que serão usados para o problema acima.

b) Defina uma estratégia de ramificação.

c) Dado o grafo a seguir, o vendedor errante deve viajar do nodo 1 até o nodo 6. Aplique o branch-and-bound e mostre a árvore de busca com os cortes necessários.



Questão 6 (2 pt)
Considere a instância

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \textbf{sujeito a} & x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{B} \end{array}$$

do problema da mochila. Aplique o método de Chvátal-Gomory com multiplicador $u = 5/6$ e multiplicador $u = 3/5$ à restrição do problema para gerar duas desigualdades válidas.