Dualidade e Analise de sensibilidade: soluções

Exercício 1

a) Com variáveis duais $y_1, \ldots, y_4$ para as quatro restrições obtemos o dual

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 11y_1 + 5y_2 + 35y_4 \\
\textbf{sujeito a} \quad & y_1 + y_2 - y_3 + 7y_4 \le 4 \\
& y_1 - y_2 - y_3 + 12y_4 \le 5 \\
& y_3 \le 6 \\
& y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \lesseqgtr 0, y_4 \ge 0.
\end{aligned}$$

b) Para formar o dual temos que relaxar o sistema, introduzindo restrições adicionais $x_i \le 1$ e restrições triviais $x_i \ge 0$ para todo $i \in I$. Seja z a variável dual da primeira restrição, e y_i para $i \in I$ as variáveis duais das restrições $x_i \le 1$. Com isso o dual é

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & cz + \sum_{i\in I} y_i \\
\textbf{sujeito a} \quad & w_i z + y_i \ge p_i && \forall i \in I \\
& y_i \ge 0, z \lesseqgtr 0.
\end{aligned}$$

c) Seja y_i para $v \in V$ as variáveis duais das restrições de conservação de fluxo, e z_a para $a \in A$ as variáveis duais das limitantes superiores.

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{a\in A} u_a z_a \\
\textbf{sujeito a} \quad & -y_u + y_v + z_a \ge 0 && \forall a = (u,v) \in A \\
& y_s - y_t \ge 1 \\
& y_i \lesseqgtr 0 && \forall v \in V \\
& z_a \ge 0 && \forall a \in A.
\end{aligned}$$

Exercício 2

Para o primeiro sistema temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{1,6,3\}; \mathcal{N} = \{5,2,7,4\}; \\
c_B^t = (4\ 0\ 9); c_N^t = (0\ 5\ 0\ 11) \\
z^* = 695/7; {y_N^*}^t = 1/7(13\ 3\ 5\ 11); {x_B^*}^t = 1/7(50\ 325\ 55)
\end{aligned}$$

$$(B^{-1}N)^t = 1/7 \begin{pmatrix} 10 & -61 & -3 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -5 & 13 & 12 \end{pmatrix}; B^{-1} = 1/7 \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -61 & 7 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para o segundo sistema temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{6,2,3,4,9\}; \mathcal{N} = \{5,1,7,8\}; \\
c_B^t = (0\ 2\ -1\ -2\ 0); c_N^t = (0\ -3\ 0\ 0) \\
z^* = -1; {y_N^*}^t = (1\ 2\ 3\ 1); {x_B^*}^t = (1\ 1\ 1\ 1\ 0)
\end{aligned}$$

$$(B^{-1}N)^t = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; B^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Para a variação do primeiro coeficiente do primeiro sistema temos $\Delta c_B = (1\ 0\ 0)^t$ e $\Delta c_N = (0\ 0\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta y_N = (B^{-1}N)^t\Delta c_B - \Delta c_N = 1/7(10\ 5\ -1\ -5)^t$. Para manter a viabilidade dual temos que satisfazer

$$\begin{pmatrix}13\\3\\5\\11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\5\\-1\\-5\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-3/5, 11/5]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + \Delta c_B B^{-1} b = 695/7 + 50/7t.$$

Para a variação do segundo coeficiente do primeiro sistema temos $\Delta c_B = (0\ 0\ 0)^t$ e $\Delta c_N = (0\ 1\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta y_N = (0\ -1\ 0\ 0)^t$. Para manter a viabilidade dual temos que satisfazer

$$1/7\begin{pmatrix}13\\3\\5\\11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-\infty, 3/7]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + \Delta c_B B^{-1} b = 695/7.$$

Para a variação do primeiro lado direito do primeiro sistema temos $\Delta b = (1\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta x_B = 1/7(10\ -61\ -3)^t$. Para manter a viabilidade primal temos que satisfazer

$$x_B^* + \Delta x_B t \iff \begin{pmatrix}50\\325\\55\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\-61\\-3\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-5, 325/61]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + c_B B^{-1}\Delta b = 695/7 + 13/7t.$$

Para a variação do segundo lado direito do primeiro sistema temos $\Delta b = (0\ 1\ 0)^t$ e logo $\Delta x_B = 1/7(0\ 7\ 0)^t$. Para manter a viabilidade primal temos que satisfazer

$$x_B^* + \Delta x_B t \iff \begin{pmatrix}50\\325\\55\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-325/7, \infty]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + c_B B^{-1}\Delta b = 695/7.$$

Para a variação do primeiro coeficiente do segundo sistema temos $\Delta c_B = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$ e $\Delta c_N = (0\ 1\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta y_N = (B^{-1}N)^t\Delta c_B - \Delta c_N = (0\ -1\ 0\ 0)^t$. Para manter a viabilidade primal temos que satisfazer

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-\infty, 2]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + \Delta c_B B^{-1} b = -1.$$

Para a variação do segundo coeficiente do segundo sistema temos $\Delta c_B = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)^t$ e $\Delta c_N = (0\ 0\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta y_N = (0\ 0\ 0\ 1)^t$. Para manter a viabilidade primal temos que satisfazer

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-1, \infty]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + \Delta c_B B^{-1} b = -1 + t.$$

Para a variação do primeiro lado direito do primeiro sistema temos $\Delta b = (1\ 0\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta x_B = 1/2(0\ 0\ 0\ -1\ 1)^t$. Para manter a viabilidade primal temos que satisfazer

$$x_B^* + \Delta x_B t \geq 0 \iff \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [0, 2]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + c_B B^{-1} \Delta b = -1 + t.$$

Para a variação do segundo lado direito do primeiro sistema temos $\Delta b = (0\ 1\ 0\ 0)^t$ e logo $\Delta x_B = 1/2(1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$. Para manter a viabilidade primal temos que satisfazer

$$x_B^* + \Delta x_B t \geq 0 \iff \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} t \geq 0$$

i.e. $t \in [-2, \infty]$. A função objetivo em função de t é

$$z^*(t) = z^* + c_B B^{-1} \Delta b = -1.$$

b) Dos oito casos do item a) três tem limites superiores infinito (a variação do segundo lado direito do primeiro sistema, a variação do segundo coeficiente do segundo sistema, e a variação do segundo lado direito do segundo sistema). Nestes casos não há nada a fazer, porque nunca teremos que reotimizar. Para os outros podemos escolher $t = u + 1$ para um intervalo de otimalidade $t \in [l, u]$. Com isso obtemos um coeficiente positivo na função objetivo ou um valor negativo básico, e temos que reotimizar com o método Simplex primal ou dual. Nos vamos dar dois exemplos:

   i) Aumento do primeiro coeficiente do primeiro sistema para $t = 16/5$, i.e. $c_1 = 36/5$. Temos que calcular os valores novos de y_N e z para este t o substituir-los no dicionário. (Observe que não marcamos mais as variáveis com $*$ porque o sistema não é mais ótimo.) Com

$$z = 855/7; y_N = (45/7\ 19/7\ 9/35\ -5/7)^t$$

obtemos o novo dicionário

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 855/7 & -45/7x_5 & -19/7x_2 & -9/35x_7 & +5/7x_4 \\ \hline x_1 = & 50/7 & -10/7x_5 & -5/7x_2 & +1/7x_7 & +5/7x_4 \\ x_6 = & 325/7 & +61/7x_5 & +6/7x_2 & -4/7x_7 & -13/7x_4 \\ x_3 = & 55/7 & +3/7x_5 & -2/7x_2 & -1/7x_7 & -12/7x_4 \end{array}$$

que pode ser reotimizado primalmente para obter, depois um pivô x_4–x_3, o novo sistema ótimo

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 1505/12 & -25/4x_5 & -17/6x_2 & -19/60x_7 & -5/12x_3 \\ \hline x_1 = & 125/12 & -5/4x_5 & -5/6x_2 & +1/12x_7 & -5/12x_3 \\ x_6 = & 455/12 & +33/4x_5 & +7/6x_2 & -5/12x_7 & +13/12x_3 \\ x_4 = & 55/12 & +1/4x_5 & -1/6x_2 & -1/12x_7 & -7/12x_3 \end{array}$$

ii) Aumento do primeiro lado direito do segundo sistema para $t = 3$, i.e. $b_1 = -2$. Temos que calcular os valores novos de x_B e z para este t e substituir-los no dicionário. Com

$$z = 2; x_B = (1\ 1\ 1\ -1/2\ 3/2)^t$$

obtemos o novo dicionário

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 2 & -x_5 & -2x_1 & -3x_7 & -x_8 \\ \hline x_6 = & 1 & & -x_1 & & \\ x_2 = & 1 & & & -x_7 & \\ x_3 = & 1 & & & & -x_8 \\ x_4 = & -1/2 & +1/2x_5 & -1/2x_1 & +1/2x_7 & +x_8 \\ x_9 = & 3/2 & -1/2x_5 & +1/2x_1 & -1/2x_7 & -x_8 \end{array}$$

que pode ser reotimizado dualmente para obter, depois um pivô x_4–x_8, o novo sistema ótimo

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 3/2 & -1/2x_5 & -5/2x_1 & -5/2x_7 & -x_4 \\ \hline x_6 = & 1 & & -x_1 & & \\ x_2 = & 1 & & & -x_7 & \\ x_3 = & 1/2 & +1/2x_5 & -1/2x_1 & +1/2x_7 & -x_4 \\ x_8 = & 1/2 & -1/2x_5 & +1/2x_1 & -1/2x_7 & +x_4 \\ x_9 = & 1 & & & & -x_4 \end{array}$$

Exercício 3

a) Não. Por exemplo o sistema $\max\{x \mid x \le b, x \ge 0\}$ é claramente limitado ($l = 0$, $u = b$), mas o seu dual $\min\{y \mid y \ge 1\}$ não é.

b) O dual do sistema dado é

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & -c^t y \\ \textbf{sujeito a} & y^t A \le c^t \\ & y \ge 0. \end{array}$$

A restrição é equivalente com $A^t y \le c$ e com $A^t = -A$ obtemos $-Ay \le c$, ou $Ay \ge -c$. Porém, multiplicando a função objetivo por -1 obtemos o sistema primal. O sistema é *auto-dual*.

Pelo mesmo raciocínio do teorema da dualidade fraca obtemos

$$c^t x \ge y^t Ax \ge -cy^t$$

e em particular para uma dada solução ótima x^*, a solução $y^* = x^*$ tem que ser uma solução ótima do dual. Logo $c^t x^* \ge -c^t x^*$, i.e. $2c^t x^* \ge 0$. Como $x^* \ge 0$ obtemos, em cada componente i: $x_i^* = 0 \vee c_i \ge 0$. Para o vetor x' das variáveis com $c_i \ge 0$ podemos escolher $x' = 0$ também, porque o valor da função objetivo 0 é mínimo e $Ax' \ge -c$ é satisfeito. Logo a solução ótima é $x = 0$.

Em resumo, caso existe uma solução ótimo ela possui o valor 0 (e de fato só existem soluções viáveis com valor 0), senão o sistema é ilimitado ou inviável.