

Solução exercícios análise de sensibilidade e formulação inteira

Exercício 0.1

O dicionário ótimo (2 pivôs) é

$$\begin{array}{rcl} z = & 14 & -5/2x_5 \quad -11/2x_2 \quad -3x_6 \\ x_4 = & 15/2 & -1/4x_5 \quad -9/4x_2 \quad -x_6 \\ x_1 = & 1/2 & -1/4x_5 \quad +3/4x_2 \\ x_3 = & 9/2 & -3/4x_5 \quad +1/4x_2 \quad -x_6 \end{array}$$

Temos $\mathcal{B} = \{4, 1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 2, 6\}$. A alteração dos coeficientes da função objetivo corresponde com

$\Delta c =$	$(\Delta c_B^t \quad \Delta c_N^t)^t$	$\Delta y_N = (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N$	$-y_N^*/\Delta y_N$	Limites t
		$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 6 \end{array}$	
$(0 \ 1 \ 0)^t$	$(0 \ 0 \ 0)^t$	$(1/4 \ -3/4 \ 0)^t$	$\begin{array}{ccc} -10 & 22/3 & - \end{array}$	$\begin{array}{cc} -10 & 22/3 \end{array}$
$(0 \ 0 \ 0)^t$	$(0 \ 1 \ 0)^t$	$(0 \ -1 \ 0)^t$	$\begin{array}{ccc} - & 11/2 & - \end{array}$	$\begin{array}{cc} -\infty & 11/2 \end{array}$
$(0 \ 0 \ 1)^t$	$(0 \ 0 \ 0)^t$	$(3/4 \ -1/4 \ 1)^t$	$\begin{array}{ccc} -10/3 & 22 & -3 \end{array}$	$\begin{array}{cc} -3 & 22 \end{array}$

O novo valor da função objetivo é $z^*(t) = z^* + \Delta c_B^t B^{-1}b$. Nos três casos temos

$$z^*(t) = 14 + 1/2t$$

$$z^*(t) = 14$$

$$z^*(t) = 14 + 9/2t$$

Para calcular a alteração dos lados direitos temos que calcular

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1/4 \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Uma alteração dos lados direitos corresponde com

Δb	$\Delta x_B = B^{-1}\Delta b$	$-x_B^*/\Delta x_B$	Limites t
	$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \end{array}$	
$(1 \ 0 \ 0)^t$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} -15/2 & - & - \end{array}$	$\begin{array}{cc} -15/2 & \infty \end{array}$
$(0 \ 1 \ 0)^t$	$\begin{array}{ccc} 1/4 & 1/4 & 3/4 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} -30 & -2 & -6 \end{array}$	$\begin{array}{cc} -2 & \infty \end{array}$
$(0 \ 0 \ 1)^t$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} -15/2 & - & -9/2 \end{array}$	$\begin{array}{cc} -9/2 & \infty \end{array}$

O novo valor da função objetivo é $z^*(t) = z^* + c_B^t B^{-1}\Delta b$ com $c_B^t B^{-1} = (0 \ 1 \ 3)B^{-1} = (0 \ 5/2 \ 3)$

$$z^*(t) = 14$$

$$z^*(t) = 14 + 5/2t$$

$$z^*(t) = 14 + 3t$$

Exercício 0.2

Dicionário ótimo(2 pivôs):

$$\begin{array}{rcccc} z = & 7 & -5/2x_1 & -1/2x_4 & -5/2x_5 \\ x_2 = & 1 & +3/2x_1 & -1/2x_4 & +1/2x_5 \\ x_3 = & 3 & -1/2x_1 & -1/2x_4 & -1/2x_5 \\ x_6 = & 2 & -x_1 & +2x_4 & +x_5 \end{array}$$

$\mathcal{B} = \{2, 3, 6\}$, $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$.

Alteração c:

$\Delta c =$	$(\Delta c_B^t \quad \Delta c_N^t)^t$	$\Delta y_N = (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N$	$-y_N^*/\Delta y_N$	Limites t
		$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 6 \end{array}$	
	$(0 \ 0 \ 0 \quad 1 \ 0 \ 0)^t$	$(-1 \quad 0 \quad 0)^t$	$5/2 \quad - \quad -$	$-\infty \quad 5/2$
	$(1 \ 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \ 0)^t$	$(-3/2 \quad 1/2 \quad -1/2)^t$	$5/3 \quad -1 \quad 5$	$-1 \quad 5/3$
	$(0 \ 1 \ 0 \quad 0 \ 0 \ 0)^t$	$(1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)^t$	$-5 \quad -1 \quad -5/2$	$-1 \quad \infty$

$$z^*(t) = 14$$

$$z^*(t) = 14 + t$$

$$z^*(t) = 14 + 3t$$

Alteração b:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Δb	$\Delta x_B = B^{-1} \Delta b$	$-x_B^*/\Delta x_B$	Limites t
	$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \end{array}$	
$(1 \ 0 \ 0)^t$	$1/2 \quad 1/2 \quad -2$	$-2 \quad -6 \quad 1$	$-2 \quad 1$
$(0 \ 1 \ 0)^t$	$-1/2 \quad 1/2 \quad -1$	$2 \quad -6 \quad 2$	$-6 \quad 2$
$(0 \ 0 \ 1)^t$	$0 \quad 0 \quad 1$	$- \quad - \quad -2$	$-2 \quad \infty$

$$c_B^t B^{-1} = (-2 \ 3 \ 0) B^{-1} = (1/2 \ 5/2 \ 0)$$

$$z^*(t) = 14 + 1/2t$$

$$z^*(t) = 14 + 5/2t$$

$$z^*(t) = 14$$

Exercício 0.3

Seja $G = (V, A, c)$ um grafo não-direcionado com pesos c_a nas arestas. Para um conjunto de vértices $S \subseteq V$, seja $N(S) = \{a \in A \mid |a \cap S| = 1\}$ o conjunto de arestas na “borda” de S . Abreviamos $N(\{v\})$ por $N(v)$ para conjuntos de cardinalidade 1.

Uma formulação do problema da árvore geradora mínima é

$$\begin{array}{ll} \text{minimiza} & \sum_{a \in A} c_a x_a \\ \text{sujeito a} & \sum_{a \in N(s)} x_a \geq 1 \quad \forall S \subset V \\ & x_a \in \mathbb{B} \quad \forall a \in A \end{array}$$

com implementação

```

1  set V;
2  set A within { (u,v) in V cross V : u<v };
3  var x { A } binary;
4  param c { A };
5  param n := card(V);
6  set pV := 1..(2^n-2);
7  set PV {k in pV} := {i in V: (k div 2^(i-1)) mod 2 = 1};
8
9  minimize pesoTotal:
10     sum { (u,v) in A } c[u,v]*x[u,v];
11  subject to conectado { i in pV }:
12     sum { (u,v) in A : (u in PV[i] and v not in PV[i]) or
13         (u not in PV[i] and v in PV[i]) } x[u,v] >= 1;
14 end;
```

Uma formulação do emparelhamento máximo é

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximiza} & \sum_{a \in A} c_a x_a \\
 \text{sujeito a} & \sum_{a \in N(v)} x_a \leq 1 \quad \forall v \in V \\
 & x_a \in \mathbb{B} \quad \forall a \in A
 \end{array}$$

com implementação

```

1  set V;
2  set A within { (u,v) in V cross V : u<v };
3  param c { A };
4  var x { A } binary;
5
6  maximize pesoTotal:
7     sum { (u,v) in A } c[u,v]*x[u,v];
8  subject to limiteGrau { v in V }:
9     sum { (u,v) in A } x[u,v] + sum { (v,u) in A } x[v,u] <= 1;
10 end;
```

(Essa formulação é válida em grafos não-bipartidos também.) Uma formulação do problema da clique máxima é

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximiza} & \sum_{v \in V} x_v \\
 \text{sujeito a} & x_u + x_v \leq 1 \quad \forall \{u,v\} \notin A \\
 & x_v \in \mathbb{B} \quad \forall v \in V
 \end{array}$$

com implementação

```

1  set V;
2  set A within { (u,v) in V cross V : u<v };
3  var x { V } binary;
4
5  maximize numeroVertices:
6     sum { v in V } x[v];
7
8  subject to naoSelecionarSemAresta { (u,v) in V cross V : u<v and (u,v) not in A}:
9     x[u]+x[v] <= 1;
10 end;
```