Soluções: Formulação LP e Método Simplex

Questão 1 (Método Simplex)

a) O método lexicográfico introduz a perturbação simbólica ϵ_i na i-ésima restrição. Para determinar a variável sainte, compara-se os constantes e perturbações lexicograficamente, para determinar o menor limite. O método garante que a variável sainte é determinado univocamente, e que o método Simplex sempre termina.

b) O sistema já está em forma normal.

c) Não, porque temos uma solução inicial básica viável.

d) Sim, porque o sistema inicial não é ótimo. O dicionário inicial é

$$\begin{array}{rrrrrrr} z = & 0 & & & +5x_1 & +2x_2 & +3x_3 \\ \hline x_4 = & 0 & +\epsilon_1 & & -x_1 & -2x_2 & -x_3 \\ x_5 = & 0 & & +\epsilon_2 & -3x_1 & -2x_2 & +x_3 \end{array}$$

e o pivô x_1–x_4 produz o dicionário ótimo

$$\begin{array}{rrcrrr} z = & 0 & & -5x_4 & -8x_2 & -2x_3 \\ \hline x_1 = & 0 & \epsilon_1 & -x_4 & -2x_2 & -x_3 \\ x_5 = & 0 & -3\epsilon_1 + \epsilon_2 & +3x_4 & +4x_2 & +4x_3 \end{array}.$$

O solução ótimo é $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ com valor 0.

Questão 2 (Método Simplex)

a) A regra de Bland garante a terminação do método. Ela define escolher entre os candidatos para entrar na base e entre os candidatos para sair da base sempre a variável menor (em alguma ordem, tipicamente pelo índice).

b) O sistema em forma normal é

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & 8x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ \textbf{sujeito a} & 4x_1 + x_2 - 8x_3 \leq 1, \\ & 7x_1 - 8x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

c) Não, porque nenhum lado direito é negativo, logo a base x_4, x_5 é viável.

d) Sim, porque o dicionário inicial

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +8x_1 & +8x_2 & +5x_3 \\ \hline x_4 = & 1 & -4x_1 & -x_2 & +8x_3 \\ x_5 = & 2 & -7x_1 & +8x_2 & -2x_3 \end{array}$$

ainda não é ótimo. Pela regra de Bland, o primeiro pivô é x_1–x_4 e produz

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 2 & -2x_4 & +6x_2 & +21x_3 \\ \hline x_1 = & 1/4 & -1/4x_4 & -1/4x_2 & +2x_3 \\ x_5 = & 1/4 & +7/4x_4 & +39/4x_2 & -16x_3 \end{array}$$

e o próximo pivô x_2–$x - 1$ produz o sistema

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 8 & -8x_4 & -24x_1 & +69x_3 \\ \hline x_2 = & 1 & -x_4 & -4x_1 & +8x_3 \\ x_5 = & 10 & -8x_4 & -39x_1 & +62x_3 \end{array}$$

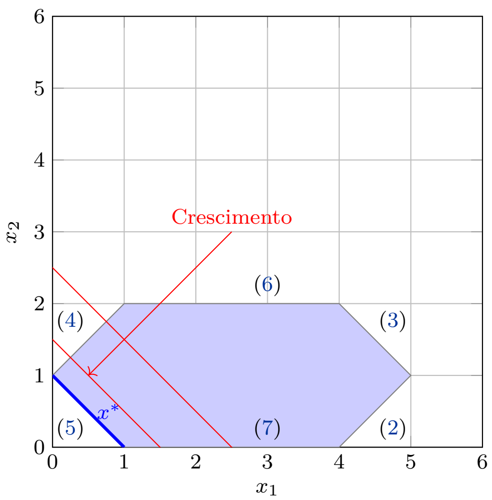
que é ilimitado (o candidato para entrar x_3 pela regra de Bland não possui limite). Logo o sistema não possui solução ótima.

Questão 3 (Solução gráfica)

A solução gráfica de

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & x_1 + x_2 && (1) \\ \textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \geq -4, && (2) \\ & 1/2x_1 + 1/2x_2 \leq 3, && (3) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1, && (4) \\ & x_1 + x_2 \geq 1, && (5) \\ & x_2 \leq 2, && (6) \\ & x_1, x_2 \geq 0. && (7) \end{aligned}$$

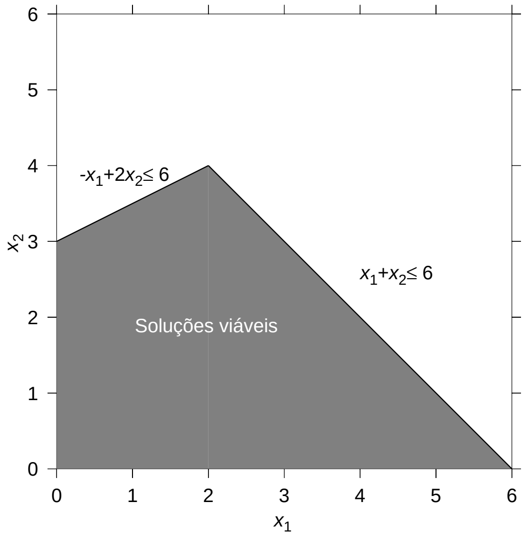
é



O gráfico mostra os conjuntos de nível 1.5 e 3. Temos um conjunto infinito de soluções ótimas (em azul). Em exemplo de uma solução ótima é $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ de valor 1.

Questão 4 (Função objetivo parameterizada)

A região das soluções viáveis é



A soluções ótimas dependem da direção em que a função objetivo cresce. Por exemplo, para $t = 0$ ela cresce na direção $(-1, -3)$ e a solução ótima é $(0, 0)$. Desta maneira, o problema pode ser resolvido graficamente.

Uma solução pelo método Simplex: O dicionário inicial (após de introduzir variáveis de folga x_3 e x_4, e converter para um problem de maximização) é

$$\begin{array}{lllll} z & = 0 & +(1-2t)x_1 & +(3-t)x_2 \\ \hline x_3 & = 6 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & = 6 & +x_1 & -2x_2 \end{array}$$

Esse dicionário é ótimo, caso $1 - 2t \leq 0$ e $3 - t \leq 0$. Logo, para $t \geq 3$ temos a solução ótima $x_1, x_2 = 0, 0$ com valor 0. Caso contrário, podemos pivotar com x_2 (que garantidamente é positivo) e a variável sainte é x_4. Após o pivô obtemos

$$\begin{array}{llll} z & = 9-3t & +5/2(1-t)x_1 & +1/2(-3+t)x_4 \\ \hline x_3 & = 3 & -3/2x_1 & +1/2x_4 \\ x_2 & = 3 & +1/2x_1 & -1/2x_4 \end{array}$$

Neste caso, o dicionário está ótimo para $1 - t \leq 0$ e $-3 + t \leq 0$. Logo para $t \geq 1$ temos a solução ótima $x_1, x_2 = 0, 3$ com valor $-9 + 3t$. Caso contrário, podemos continuar pivotar com x_1 (que agora é garantidamente positivo) com x_3 para obter

$$\begin{array}{llll} z & = 14-8t & +5/3(-1+t)x_3 & +1/3(-2-t)x_4 \\ \hline x_1 & = 2 & -2/3x_3 & +1/3x_4 \\ x_2 & = 4 & -1/3x_3 & -1/3x_4 \end{array}$$

A condição de otimalidade $-1 + t \leq 0$ e $-2 - t \leq 0$ é satisfeita para $t \geq -2$. Neste caso temos a solução ótima $x_1, x_2 = 2, 4$ com valor $-14 + 8t$. Para $t < -2$ podemos pivotar x_4 com x_2 para obter

$$\begin{array}{llll} z & = 6-12t & (-1+2t)x_3 & +(2+t)x_2 \\ \hline x_1 & = 6 & -x_3 & -x_2 \\ x_4 & = 12 & -x_3 & -3x_2 \end{array}$$

Para $t < -2$ este dicionário é ótimo, com solução $x_1, x_2 = 6, 0$ e valor $-6 + 12t$.

Questão 5 (Afirmações programação linear)

(a) *Se o método Simplex entra num ciclo, então uma solução básica degenerada se repete?*
Sim, somente um soluções básica degeneradas não tem progresso, logo todas soluções básicas de um ciclo são degeneradas.

(b) *Se um dicionário não é degenerado, então a variável entrante e a variável sainte são determinados de forma única?*
Não, mesmo não sendo degenerado, pode ter uma escolha tanto da variável entrante (mais que um coeficiente máximo na regra de maior coeficiente, por exemplo) quanto da variável sainte (mais que uma restrição limitante).

(c) *Se o sistema primal é ilimitado, então o sistema dual também é ilimitado?*
Não, se o sistema primal é ilimitado, o sistema dual é inviável.

(d) *Se o sistema primal possui uma solução ótima, então o sistema dual também.*
Sim, pelo teorema da dualidade forte.

(e) *O número de soluções ótimas de um programa linear sempre é finito?*
Não, se o sistema possui mais que uma solução ótima, então existe um número infinito de soluções ótimas. Por exemplo, se duas soluções básicas são ótimas, todas combinações convexas são ótimas. Observe que um sistema ilimitado não possui solução ótima, porque para cada solução existe outra de maior valor.

(f) *Pelo teorema das folgas complementares é possível que tanto uma variável primal quanto a folga dual correspondente é zero.*
Sim, porque pelo teorema o produto dos dois tem que ser 0.

(g) *Um dicionário é dualmente viável, caso todos coeficientes da função objetivo são negativos.*
Sim, por definição da viabilidade dual.

(h) *Pelo teorema fraca de dualidade sabemos que nenhuma solução do primal possui um valor igual a alguma solução do dual.*
Não, as soluções ótimas podem ter o mesmo valor.

Questão 6 (Método Simplex)

Depois da normalização temos o dicionário inicial

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
z & = & 0 & +2x_1 & +x_2 & & -x_4 & \\
\hline
x_6 & = & 0 & -x_1 & -2x_2 & +x_3 & & \\
x_7 & = & 0 & +x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \\
x_8 & = & 0 & -x_1 & -x_2 & & +6x_4 & \\
x_9 & = & 0 & +x_1 & +x_2 & & -6x_4 & \\
x_{10} & = & 0 & +3x_1 & -x_2 & & -2x_4 & +x_5 \\
x_{11} & = & 0 & -3x_1 & +x_2 & & +2x_4 & -x_5
\end{array}
$$

o pivô x_6–x_1 produz

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
z & = & 0 & -2x_6 & -3x_2 & +2x_3 & -x_4 & \\
\hline
x_1 & = & 0 & -x_6 & -2x_2 & +x_3 & & \\
x_7 & = & 0 & -x_6 & & & & \\
x_8 & = & 0 & +x_6 & +x_2 & -x_3 & +6x_4 & \\
x_9 & = & 0 & -x_6 & -x_2 & +x_3 & -6x_4 & \\
x_{10} & = & 0 & -3x_6 & -7x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 \\
x_{11} & = & 0 & +3x_6 & +7x_2 & -3x_3 & +2x_4 & -x_5
\end{array}
$$

o pivô x_8–x_3 produz

$$\begin{array}{rrlllll}
z = & 0 & & -x_2 & -2x_8 & +11x_4 & \\
\hline
x_1 = & 0 & & -x_2 & -x_8 & +6x_4 & \\
x_7 = & 0 & -x_6 & & & & \\
x_3 = & 0 & +x_6 & +x_2 & -x_8 & +6x_4 & \\
x_9 = & 0 & & & -x_8 & & \\
x_{10} = & 0 & & -4x_2 & -3x_8 & +16x_4 & +x_5 \\
x_{11} = & 0 & & +4x_2 & +3x_8 & -16x_4 & -x_5
\end{array}$$

e o pivô x_{11}–x_4 produz

$$\begin{array}{rrlllll}
z = & 0 & & +7/4x_2 & +1/16x_8 & -11/16x_{11} & -11/16x_5 \\
\hline
x_1 = & 0 & & +1/2x_2 & +1/8x_8 & -3/8x_{11} & -3/8x_5 \\
x_7 = & 0 & -x_6 & & & & \\
x_3 = & 0 & +x_6 & +5/2x_2 & +1/8x_8 & -3/8x_{11} & -3/8x_5 \\
x_9 = & 0 & & & -x_8 & & \\
x_{10} = & 0 & & & & -x_{11} & \\
x_4 = & 0 & & +1/4x_2 & +3/16x_8 & -1/16x_{11} & -1/16x_5
\end{array}.$$

Neste dicionário o aumento da variável x_2 é ilimitado, logo o sistema é ilimitado e o problema original não possui uma solução mínima.

Questão 7 (Método Simplex)

a) A forma normal é

$$\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\textbf{sujeito a} & -x_1 - x_2 + x_3 \le -2, \\
& x_1 + 5x_2 - 3x_3 \le 12, \\
& -x_1 - 2x_3 \le -2, \\
& 3x_1 + x_3 \le 6, \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+.
\end{array}$$

b) Temos que aplicar a fase I, porque tem coeficientes negativos. O dicionário inicial auxiliar é

$$\begin{array}{rrllll}
z = & 0 & & & & -x_0 \\
z = & 0 & +2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \\
\hline
x_4 = & -2 & +x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_0 \\
x_5 = & 12 & -x_1 & -5x_2 & +3x_3 & +x_0 \\
x_6 = & -2 & +x_1 & & +2x_3 & +x_0 \\
x_7 = & 6 & -3x_1 & & -x_3 & +x_0
\end{array}$$

(manteremos a função objetivo do sistema original em paralelo com a função o objetivo do sistema auxiliar na segunda linha), pseudo-pivô x_4–x_0 produz

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & -2 & +x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 \\ z = & 0 & +2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \\ \hline x_0 = & 2 & -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 \\ x_5 = & 14 & -2x_1 & -6x_2 & +4x_3 & +x_4 \\ x_6 = & 0 & & -x_2 & +3x_3 & +x_4 \\ x_7 = & 8 & -4x_1 & -x_2 & & +x_4 \end{array},$$

e o pivô x_0–x_1 produz o sistema ótimo

$$\begin{array}{rrrrrr} z = & 0 & -x_0 & & & \\ z = & 4 & -2x_0 & -x_2 & +5x_3 & +2x_4 \\ \hline x_1 = & 2 & -x_0 & -x_2 & +x_3 & +x_4 \\ x_5 = & 10 & +2x_0 & -4x_2 & +2x_3 & -x_4 \\ x_6 = & 0 & & -x_2 & +3x_3 & +x_4 \\ x_7 = & 0 & +4x_0 & +3x_2 & -4x_3 & -3x_4 \end{array}.$$

A solução ótima da fase I e $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$ com valor 0.

c) Temos que aplicar a fase II, porque o resultado da fase I obteve um valor 0. O dicionário inicial, remove a variável x_0 do dicionário final da fase I é

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 4 & -x_2 & +5x_3 & +2x_4 \\ \hline x_1 = & 2 & -x_2 & +x_3 & +x_4 \\ x_5 = & 10 & -4x_2 & +2x_3 & -x_4 \\ x_6 = & 0 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 \\ x_7 = & 0 & +3x_2 & -4x_3 & -3x_4 \end{array},$$

o pivô x_3–x_7 produz

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 4 & +11/4x_2 & -5/4x_7 & -7/4x_4 \\ \hline x_1 = & 2 & -1/4x_2 & -1/4x_7 & +1/4x_4 \\ x_5 = & 10 & -5/2x_2 & -1/2x_7 & -5/2x_4 \\ x_6 = & 0 & +5/4x_2 & -3/4x_7 & -5/4x_4 \\ x_3 = & 0 & +3/4x_2 & -1/4x_7 & -3/4x_4 \end{array},$$

e o pivô x_2–x_5 leva ao sistema ótimo

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 15 & -11/10x_5 & -9/5x_7 & -9/2x_4 \\ \hline x_1 = & 1 & +1/10x_5 & -1/5x_7 & +1/2x_4 \\ x_2 = & 4 & -2/5x_5 & -1/5x_7 & -x_4 \\ x_6 = & 5 & -1/2x_5 & -x_7 & -5/2x_4 \\ x_3 = & 3 & -3/10x_5 & -2/5x_7 & -3/2x_4 \end{array}.$$

Temos a solução ótima $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$ com valor 15.

Questão 8 (Método Simplex)

Sabemos que "primalmente ótimo" e equivalente a "dualmente factível" e "dualmente ótimo" e equivalente a "primalmente factível". Logo todas configurações que contradizem essas equivalências são impossíveis. Sobram então $2^3 = 8$ casos que todos são possíveis:

Pr. fac.	Pr. opt.	degenerado	Comentário
n	n	n	(1)
n	n	s	(2)
n	s	n	(3)
n	s	s	(4)
s	n	n	(5)
s	n	s	(6)
s	s	n	(7)
s	s	s	(8)

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & +2x_1 & +x_2 \\ \hline x_3 = & -1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 1 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & +2x_1 & +x_2 \\ \hline x_3 = & -1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 0 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{9}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & -2x_1 & -x_2 \\ \hline x_3 = & -1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 1 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{10}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & -2x_1 & -x_2 \\ \hline x_3 = & -1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 0 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{11}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & +2x_1 & +x_2 \\ \hline x_3 = & 1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 1 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{12}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & +2x_1 & +x_2 \\ \hline x_3 = & 1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 0 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{13}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & -2x_1 & -x_2 \\ \hline x_3 = & 1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 1 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{14}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & -2x_1 & -x_2 \\ \hline x_3 = & 1 & -x_1 & -2x_2 \\ x_4 = & 0 & +x_1 & +2x_2 \end{array} \tag{15}$$

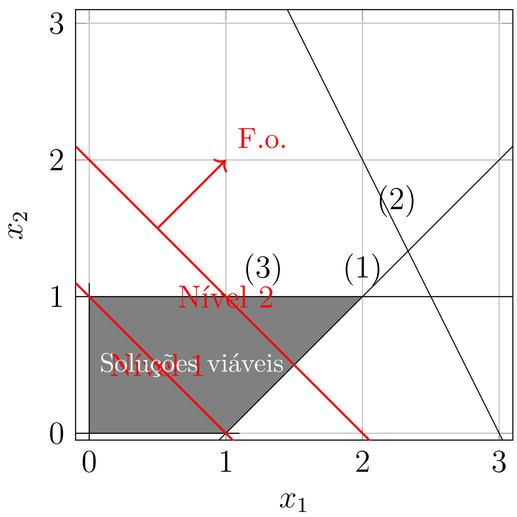
Questão 9 (Formulação Matemática)

Seja p_t o período antes do período t ($p_t = t-1$, para $t > 1$, e $p_1 = 6$) e m_t o número mínimo necessário de policiais no periódo t. Temos

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimiza} & \sum_{t\in[6]} x_t & \\ \textbf{sujeito a} & x_t + x_{p_t} \geq m_t, & t \in [6], \\ & x_t \geq 0, & t \in [6]. \end{array}$$

Questão 10 (Solução gráfica)

Temos



com solução ótima $x = (2\ 1)^t$ de valor 3.

Questão 11 (Formulação Matemática)

Com n fabricas $F = [n]$ e m clientes $C = [m]$ seja c_f o custo de producao na fabrica $f \in F$, d_c a demanda do cliente $c \in C$ e t_{fc} o custo de transporte da fabrica $f \in F$ para cliente $c \in C$. Seja x_f a quantidade produzida na fabrica $f \in F$ e y_{fc} a quantidade transportada da fabrica $f \in F$ para cliente $c \in C$.

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{f\in F} c_f x_f + \sum_{\substack{f\in F\\ c\in C}} t_{fc} y_{fc} & \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{f\in F} y_{fc} \geq d_c, & \forall c \in C,\\
& \sum_{c\in F} y_{fc} = x_f, & \forall f \in F,\\
& x_f \in \mathbb{R}_+, y_{fc} \geq 0, & \forall f \in F, c \in C.
\end{aligned}
$$