Soluções: Programação Inteira II

Questão 1 (Planos de corte)

O problema em forma normal é

$$\begin{aligned}\textbf{maximiza}\quad & -5x_1-9x_2-23x_3,\\ \textbf{sujeito a}\quad & -20x_1-35x_2-95x_3\le -319,\\ & x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

A solução do problema com cortes de Chvatal-Gomory é (talvez contrariamente à intuição) difícil e precisa cerca de 20 cortes até chegar na solução inteira ótima $x_1=0; x_2=1, x_3=3$ com valor 78. Os primeiros passos são

1. Dicionário inicial (infactível: aplicar método Simplex de duas fases):

$$\begin{array}{rrrrr} z= & 0 & -5x_1 & -9x_2 & -23x_3\\ \hline x_4= & -319 & +20x_1 & +35x_2 & +95x_3\end{array}\tag{1}$$

2. Solução inicial:

$$\begin{array}{rrrrr} z= & -7337/95 & -3/19x_1 & -10/19x_2 & -23/95x_4\\ \hline x_3= & +319/95 & -4/19x_1 & -7/19x_2 & +1/95x_4\end{array}\tag{2}$$

3. Novo corte:

$$\begin{array}{rrrrr} z= & -7337/95 & -3/19x_1 & -10/19x_2 & -23/95x_4\\ \hline x_3= & +319/95 & -4/19x_1 & -7/19x_2 & +1/95x_4\\ x_5= & -34/95 & +4/19x_1 & +7/19x_2 & +94/95x_4\end{array}\tag{3}$$

4. Solução depois da re-otimização:

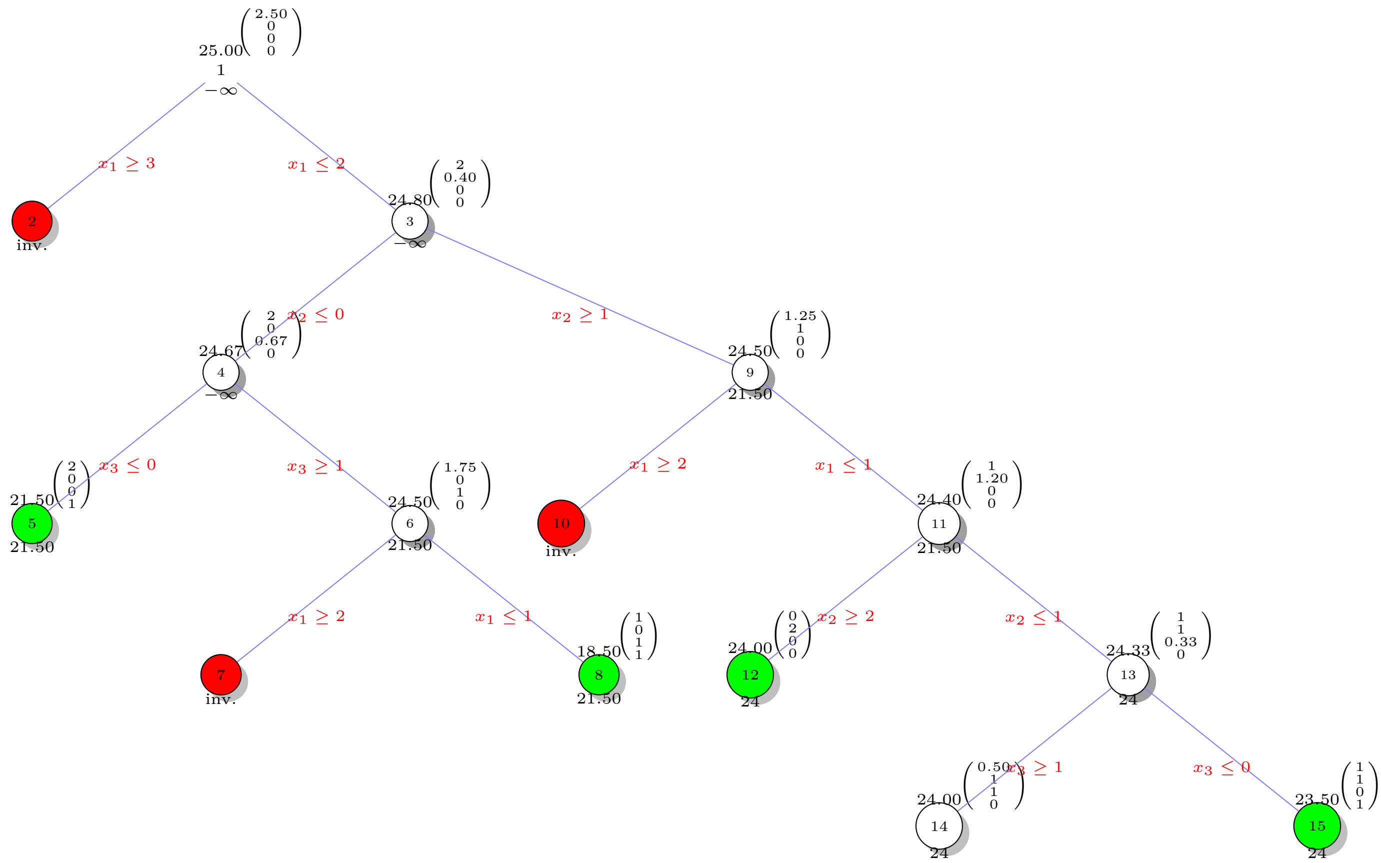
$$\begin{array}{rrrrr} z= & -3634/47 & -5/47x_1 & -41/94x_2 & -23/94x_5\\ \hline x_3= & +158/47 & -10/47x_1 & -35/94x_2 & +1/94x_5\\ x_4= & +17/47 & -10/47x_1 & -35/94x_2 & +95/94x_5\end{array}\tag{4}$$

5. Novo corte:

$$\begin{array}{rrrrr} z= & -3634/47 & -5/47x_1 & -41/94x_2 & -23/94x_5\\ \hline x_3= & +158/47 & -10/47x_1 & -35/94x_2 & +1/94x_5\\ x_4= & +17/47 & -10/47x_1 & -35/94x_2 & +95/94x_5\\ x_6= & -17/47 & +10/47x_1 & +35/94x_2 & +93/94x_5\end{array}\tag{5}$$

Questão 2 (Branch and bound)

A solução ótima é $x_1=x_3=x_4=0$ e $x_2=2$ com valor 24. A árvore de B&B é



(vermelho: infactível, verde: integral). No nó 14 temos um corte por otimalidade.

Questão 3 (Desigualdades válidas)

Para conseguir derivar a desigualdade válida, temos que lembrar que além da restrição dada, temos ainda as restrições $x_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq 5$. Somando $26x_2 \leq 26$ e $26x_3 \leq 26$ obtemos

$$79x_1 + 79x_2 + 79x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 230$$

e com $u = 1/79$ a desigualdade desejada.

Questão 4 (Desigualdades válidas)

Podemos aplicar a eliminação de subciclos

$$\sum_{a \in S} x_a \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq V, \qquad \text{Não contém ciclos}$$

no ciclo $2, 5, 6$ para obter a desigualdade

$$x_{2,6} + x_{6,5} + x_{5,2} \leq 2$$

que é válida mas não satisfeita por x^*.

Questão 5 (Matrizes totalmente unimodulares)

Se a matriz tem ao menos um elemento 0 ela é TU. Isso se aplica para 65 das 81 matrizes. Para os restantes 16 em $\{-1,1\}^{2\times 2}$ a condição para ser TU é que os produtos dos elementos da diagonal principal e secundária são ambas 1 ou ambas -1, porque nesse caso a determinante será 0, enquanto ele é ± 2 nos outros casos. Isso é o caso para 8 das 16 matrizes, que possuem 0, 2 ou 4 elementos -1:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Em total, 73 das 81 matrizes são TU.

Questão 6 (Algoritmo Branch-and-bound)

a) Encontramos duas soluções 32 e 31. Portanto o menor limite superior é 31. Considerando os limites inferiores, podemos concluir que na sub-arvóre da direita não existe solução menor que 27 (27 é possível explorando vértice 5). Na sub-árvore da esquerda, a menor solução ainda possível é 28 (explorando vértice 3), porque a sub-arvóre com raiz 4 possui limite inferior de 30. Portanto, para toda árvore podemos garantir o limite inferior de 27.

b) Podemos cortar 6 por limite e 7 por otimalidade. Temos que explorar 5, 8 e 3 (pode-se encontrar uma solução menor que 31 ainda).

Questão 7 (Desigualdades válidas)

Todas desigualdades válidas não-dominadas são

$$\begin{aligned}x_{\{v_1,v_2\}} + x_{\{v_1,v_6\}} + x_{\{v_2,v_6\}} &\le 1\\ x_{\{v_3,v_4\}} + x_{\{v_3,v_5\}} + x_{\{v_4,v_5\}} &\le 1\\ x_{\{v_1,v_2\}} + x_{\{v_2,v_4\}} + x_{\{v_4,v_3\}} + x_{\{v_3,v_5\}} + x_{\{v_5,v_1\}} &\le 2\end{aligned}$$

Questão 8 (Algoritmo de Gomory)

a) Em ambas.

b) Para a linha x_1 temos

$$x_5 = -17/31 + 3/31x_3 + 23/31x_4$$

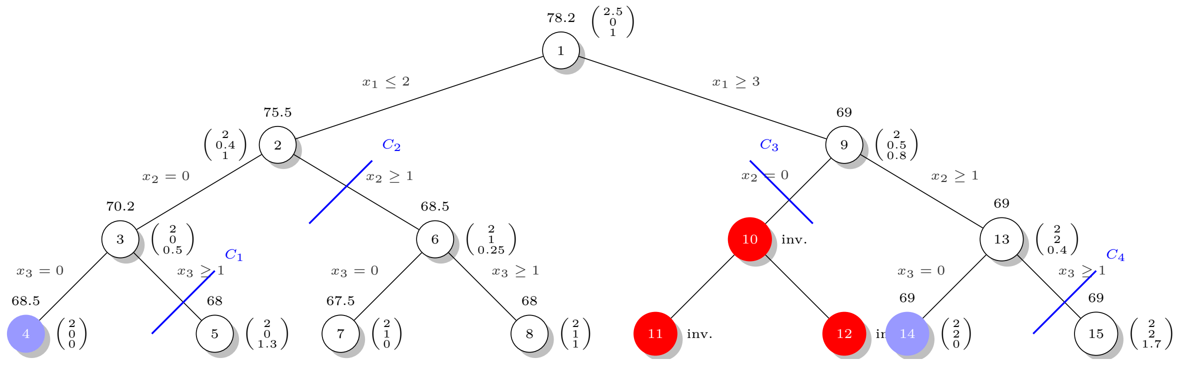
para a linha x_2

$$x_5 = -1/31 + 2/31x_3 + 5/31x_4.$$

c) Para ambos cortes o próximo pivô é x_5–x_4.

Questão 9 (Branch-and-bound)

A árvore de Branch-and-bound é



A ordem de processamento é dado pelos números dos nós (em branco). Os nós azuis são as soluções inteiras encontradas. Temos os seguintes cortes

C_1 Corte por limite: O limite superior 68 é menor que o limite inferior (melhor solução atual 68.5).

C_2 Corte por otimalidade: O limite superior 68.5 é igual ao limite inferior.

C_3 Corte por inviabilidade: A sub-árvore não tem solução.

C_4 Corte por otimalidade: O limite superior 69 é igual ao limite inferior.

Questão 10 (Matrizes totalmente unimodulares)

Sim. Uma submatriz quadrada de $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ ou é uma submatriz quadrada de A ou de B, ou uma submatriz de A e B em dois blocos. Em ambos os casos a determinante satisfaz a definição. No primeiro porque temos uma submatriz quadrada de $\left(\begin{smallmatrix} A & B \end{smallmatrix}\right)$ que por hipótese é -1, 0, ou 1. No segundo caso, seja a submatriz $c = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ de tamanho $n \times n$, com um bloco a de tamanho $k \times l$ e bloco b de tamanho $n-k \times n-l$. Caso $k = l$ temos $|c| = |a||b| \in \{-1, 0, 1\}$, porque a e b são submatrizes quadradas de $\left(\begin{smallmatrix} A & B \end{smallmatrix}\right)$. Caso contrário temos

$$|c|^2 = |c||c^t| = |cc^t| = |\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^t & 0 \\ 0 & b^t \end{smallmatrix}\right)| = |\left(\begin{smallmatrix} aa^t & 0 \\ 0 & bb^t \end{smallmatrix}\right)| = |aa^t||bb^t|$$

Mas como $k \neq l$ ou $k > l$ ou $n - k > n - l$ e pelo teorema de Cauchy-Binet ou $|aa^t|$ ou $|bb^t|$ tem que ser 0 e logo $|c| = 0$[1].

[1] Aqui $|A|$ é a determinante de A.