

Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação)

Seja

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{caso tem uma moeda na linha } i \in [4], j \in [4], \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Com isso podemos formular

$$\text{maximiza} \quad \sum_{i \in [4]} x_{ii}, \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{p \in l} x_p = 2v, \quad \forall l \in L, \quad (2)$$

$$\sum_{p \in c} x_p = 2v, \quad \forall c \in C, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in [4]} j \in [4] x_{ij} = 10, \quad (4)$$

$$x_p \in \mathbb{B}, \quad \forall p \in [4] \times [4], \quad (5)$$

$$v \in \mathbb{Z}_+. \quad (6)$$

onde $L = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}, \dots, \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ é o conjunto de todas linhas e $C = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}, \dots, \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$ é o conjunto de todas colunas.

Questão 2 (Formulação)

Isso é um problema de atribuição de número a posições. Seja $P = \{1, \dots, 19\}$ o conjunto das 19 posições (com a posição 1 no centro, e os demais no sentido horário) e seja $N = [19]$ o conjunto dos 19 números. Seja ainda $R = \{\{2, 1, 11\}, \{3, 1, 13\}, \dots, \{10, 1, 19\}\}$ o conjunto de todos raios. Define variáveis

$$x_{pn} = \begin{cases} 1 & \text{caso tem número } n \text{ na posição } p, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

e define $\text{val}(p) = \sum_{n \in N} n x_{pn}$ sendo o valor na posição $p \in P$. Com isso podemos formular

$$\text{maximiza} \quad \text{val}(1),$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{n \in N} x_{pn} = 1 \quad \forall p \in P,$$

$$\sum_{p \in P} x_{pn} = 1 \quad \forall n \in N,$$

$$\sum_{p \in r} \text{val}(p) = 30, \quad \forall r \in R,$$

$$x_p \in \mathbb{B}, \quad \forall p \in P.$$

Questão 3 (Análise de sensibilidade)

Temos base $B = \{r, f\}$ e variáveis nulas $\mathcal{N} = \{w_1, w_2\}$.

a) Neste caso $\Delta c_B = (1 \ 0)^t$. Com

$$B^{-1}N = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtemos como condição de otimalidade

$$\begin{aligned}\hat{y}_N &= y_N^* + t(B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\ &= 1/6 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t/6 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\end{aligned}$$

que é satisfeita para $t \in [-7/4, 1/2]$, para lucro de Duff regular em $[-3/4, 3/2]$, e para custos de Duff regular em $[1/2, 11/4]$.

b) Neste caso $\Delta c_B = (0 \ 1)^t$. Similar ao item anterior obtemos a condição de otimalidade

$$\begin{aligned}\hat{y}_N &= y_N^* + t(B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\ &= 1/6 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t/6 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0\end{aligned}$$

que é satisfeita para $t \in [-1/2, \infty]$, para lucro de Duff forte em $[1, \infty]$, e para custos de Duff Forte em $[-\infty, 2]$.

c) Com a nova condição de vendas a restrição

$$-r + 2f \leq 0$$

passa a ser

$$-r + f \leq 0$$

Logo, um coeficiente da coluna “f” e a matriz B é diferente. A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

agora é

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

com inversa

$$\hat{B}^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo obtemos a nova solução primal

$$\hat{x}_B = \hat{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

e com $N = I$ (a matriz de identidade, como as variáveis nulas são justamente as variáveis de folga) a nova solução dual

$$\begin{aligned}\hat{y}_N &= (\hat{B}^{-1}N)^t c_B - c_N \\ &= (\hat{B}^{-1})^t c_B \\ &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Logo a solução continua sendo primalmente e dualmente viável.

Questão 4 (Dualidade)

Para saber se as soluções são ótimas, é suficiente verificar que eles satisfazem as restrições (do primal ou dual) e possuem o mesmo valor. O sistema dual é

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & 60y_1 + 10y_2 + 20y_3, \\ \text{sujeito a} & 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ & y_1 - y_2 + y_3 \geq -1, \\ & y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0.\end{array}$$

É simples de verificar que as duas soluções satisfazem as restrições e possuem o mesmo valor da função objetivo de 22.5. Logo o colega tinha razão: ambas soluções são ótimas.