Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
Para facilitar a formulação vamos definir um conjunto de cachorros

$$C = \{\text{Tyson}, \text{Essqua}, \text{Holyfield}, \text{Maggie}, \text{Taylor}, \text{Kika}\}$$

e um conjunto de baias $B = [|C|]$. Observe que na escolhe do conjunto de baias estamos supondo que $|C|$ é um limite superior para o número de baias usadas.
Com isso seja $x_{cb} \in \mathbb{B}$ uma variável que indica que o cachorro $c \in C$ está na baia $b \in B$, e seja $y_b \in \mathbb{B}$ uma variável que indica que a baia b está usada. Logo o número de baias usadas é $\sum_{b \in B} y_b$, e caso $y_n = 0$ para alguma baia, nenhum cachorro pode ser alocado nela, i.e. $x_{cb} \leq y_b$. Com isso podemos formular

$$\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & \sum_{b \in B} y_b & \\
\textbf{sujeito a} & x_{cb} \leq y_b & \forall c \in C, b \in B \\
 & \sum_{b \in B} x_{cb} = 1 & \forall c \in C \\
 & \sum_{c \in C} x_{cb} \leq 3 & \forall b \in B \\
 & x_{\text{Tyson},b} + x_{\text{Holyfield},b} \leq 1 & \forall b \in B \\
 & x_{\text{Maggie},b} \leq x_{\text{Essqua},b} + x_{\text{Kika},b} & \forall b \in B.
\end{array}$$

A segunda restrição garante que cada cachorro fica em exatamente uma baia, e a terceira que nenhuma baia recebe mais que três cachorros. As últimas duas restrições garantam que Tyler e Holyfield não ficam na mesma baia, e que a Maggie fica com a Essqua ou a Kika.

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Para facilitar a formulação seja $T = [n]^2$ o conjunto que representa todos quadros do tabuleiro, e $L_i = \{i\} \times [n]$ e $C_i = [n] \times \{i\}$ os quadros da —-ésima linha ou coluna, respectivamente. Além disso seja c_i a soma desejada na coluna i e l_i a soma desejada na linha i. Para a formulação nos vamos supor que os valores dos itens são $1, 2, \ldots, 9$ como no exemplo, mesmo que isso pode ser diferente num Bokkusu arbitrário. A marca dos campos é simplesmente representado por uma variável $x_t \in \mathbb{B}$ para todo $t \in T$. Com isso podemos formular

$$\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & \sum_{t \in T} x_t & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{j \in [n]} j x_{ij} = l_i & \forall i \in [n] \\
 & \sum_{i \in [n]} j x_{ij} = c_j & \forall j \in [n].
\end{array}$$

A primeira restrição garante as somas das linhas e a segunda das colunas.

Questão 3 (Dualidade, 2pt)

a) Falso. O primal pode ser ilimitado.

b) Verdadeiro.

c) Verdadeiro.

d) Falso, as soluções ótimas podem ter o mesmo valor.

Questão 4 (Dualidade, 2 pt)
Sejam α_j para $j \in C$ e β_{ij} para $i \in F, j \in C$ as variáveis duais correspondentes com o primeiro e o segundo conjunto de restrições, respectivamente. Temos o dual

$$\begin{array}{llr}
\textbf{maximiza} & \sum_{j \in C} \alpha_j & \\
\textbf{sujeito a} & \alpha_j - \beta_{ij} \leq c_{ij} & \forall i \in F, j \in C \\
& \sum_{j \in C} \beta_i \leq f_i & \forall i \in F \\
& \alpha_j \in \mathbb{R}_+ & j \in C \\
& \beta_{ij} \in \mathbb{R}_+ & i \in F, j \in C.
\end{array}$$

Questão 5 (Analise de sensibilidade, 2 pt)
a) Para o nova lado direito $\hat{b}$ a nova solução básica $B^{-1}\hat{b}$ tem que ser viável. Logo

$$1/51 \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+t \\ 5 \end{pmatrix} = 1/51 \begin{pmatrix} 39-3t \\ 7+6t \end{pmatrix} \geq 0$$

ou seja $t \leq 13$ e $t \geq -7/6$.

b) Com $B^{-1}\hat{b}$ do item a), temos para o novo valor

$$c_B^t 1/51 \begin{pmatrix} 39-3t \\ 7+6t \end{pmatrix} = 1/51 \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39-3t \\ 7+6t \end{pmatrix} = 1/51(145-15t) = 145/51 - 5/17t.$$