

Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2pt)

Enumera as posições de 1 a 8, linha por linha, e seja $x_1, \dots, x_8$ o número de guardas nas respectivas posições.

$$\begin{aligned} \text{maximiza} \quad & x_1 + x_3 + x_6 + x_8, \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{1 \leq i \leq 8} x_i = 32, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ & x_1 + x_4 + x_6 = 11, \\ & x_3 + x_5 + x_8 = 11, \\ & x_6 + x_7 + x_8 = 11, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in [8]. \end{aligned}$$

Questão 2 (Formulação, 3pt)

Seja $x_{ti} = 1$ caso a tarefa $t \in T$ é executada pelo processador $i \in [m]$.

$$\begin{aligned} \text{minimiza} \quad & C_{\max}, \\ \text{sujeito a} \quad & C_{\max} \geq C_i, \quad \forall i \in [m], \\ & C_i = \sum_{t \in T} p_t x_{ti}, \quad \forall i \in [m], \\ & \sum_{i \in [m]} x_{ti} = 1, \quad \forall t \in T, \\ & x_{ti} \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T, i \in [m]. \end{aligned}$$

Questão 3 (Análise de sensibilidade, 3pt)

Temos

$$(B^{-1}N)^t = 1/7 \begin{pmatrix} 10 & -61 & -3 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -5 & 13 & 12 \end{pmatrix}; \quad y_N = 1/7 \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix},$$

uma base $\mathcal{B} = \{x_1, x_6, x_3\}$, e variáveis nulas $\mathcal{N} = \{x_5, x_2, x_7, x_4\}$. Para as coeficientes de x_1 a x_4 na função objetivo temos

$$\begin{aligned} \Delta c_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Delta c_N &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e logo

$$\Delta y_N = 1/7 \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 1/7 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Com a condição para a viabilidade dual (o sistema continua ser primalmente viável)

$$\hat{y}_N = y_N + t\Delta y_N \geq 0$$

podemos ver que todos quatro coeficientes podem ser aumentados até um limite de

$$t = 11/5; \quad 3/7; \quad 13/3; \quad 11/7.$$

Questão 4 (Dualidade, 2pt)

a) O dual é

$$\begin{array}{ll} \text{minimiza} & 19y_1 + 57y_2, \\ \text{sujeito a} & -3y_1 - 3y_2 \geq -30, \\ & y_1 + 4y_2 \geq 24, \\ & 2y_1 + 3y_2 \geq 20, \\ & 3y_1 + 2y_2 \geq 20, \\ & 5y_1 + y_2 \geq 25, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{array}$$

A solução $y_1 = 4$ e $y_2 = 5$ satisfaz as restrições com folgas $z_1 = 3$, $z_2 = 0$, $z_3 = 3$, $z_4 = 2$, $z_5 = 0$.

b) Por ter $z_1, z_3, z_4 > 0$ sabemos que $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ pelo teorema das folgas complementares. Além disso, por ter $y_1, y_2 > 0$ as folgas primais satisfazem $w_1 = w_2 = 0$. Logo obtemos o sistema de equações lineares (substituindo $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ e $w_1 = w_2 = 0$ no primal)

$$\begin{array}{l} x_2 + 5x_5 = 19 \\ 4x_2 + x_5 = 57 \end{array}$$

com solução $x_2 = 14$, $x_5 = 1$. Como verificação podemos observar que o valor da função objetivo é 361 no primal e dual.