Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

Soluções prova 3

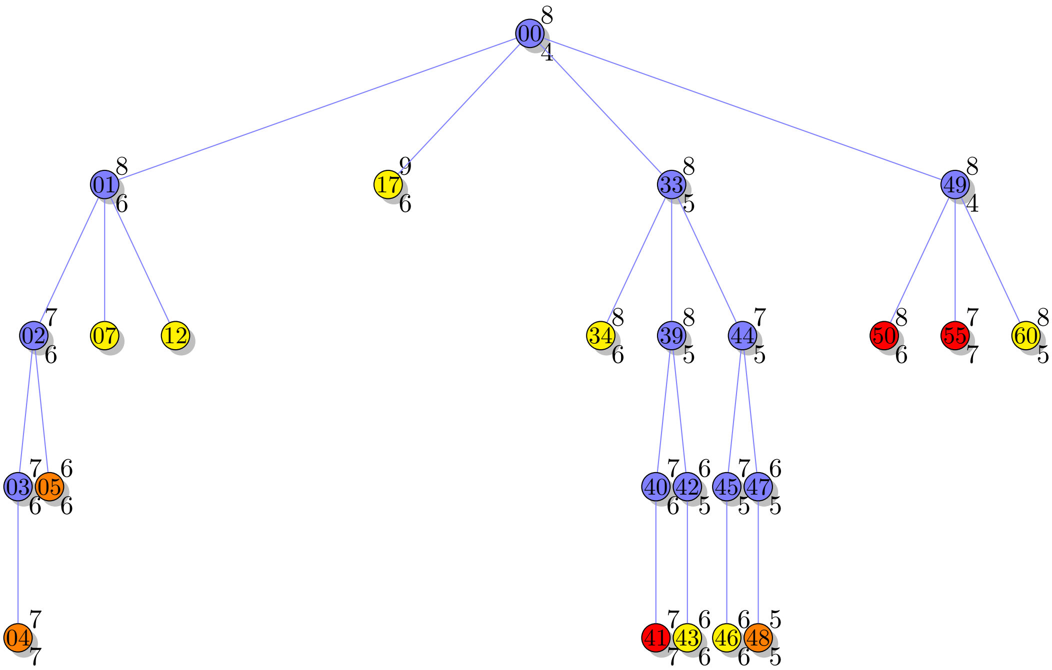
Questão 1

1. Não, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica mas possui determinante -2.

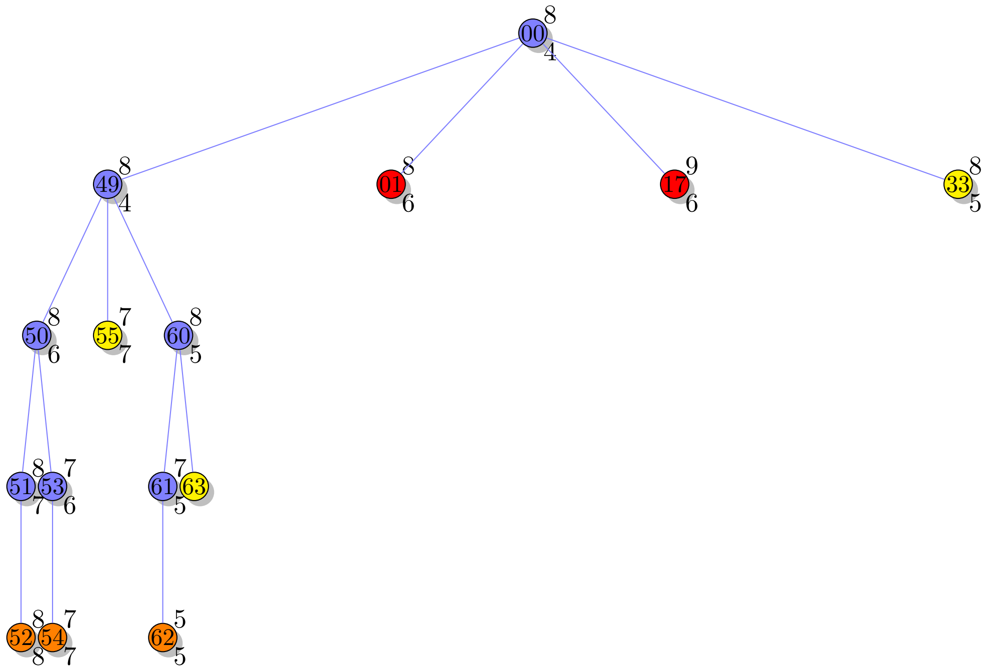
2. Sim. Caso uma submatriz contém somente colunas de A ou $-A$ ela é TU, no caso do $-A$ pela proposição provado em aula. Caso ela contem colunas de A e $-A$ eles podemos multiplicar as colunas de $-A$ por -1 (pela mesma proposição) para obter uma submatriz de A, que possui determinante em $\{0, -1, 1\}$.

Questão 2

a) Obtemos a seguinte solução, usando *laranja* para indicar um corte por otimalidade junto com uma solução encontrada, *amarelo* para indicar um corte por otimalidade, e *vermelho* para indicar um corte por limite.



b) Com a mesma convenção de cores do item a) temos a solução



Questão 3

a) O segundo sistema é igual ao primeiro, com uma restrição a menos. Logo toda solução viável do primeiro é uma solução viável do segundo sistema. Conversamente, supõe que temos uma solução viável x_1, x_2 do segundo. É suficiente mostrar que $x_1 \leq 0$. Mas como $x_1 + x_2 \leq 0$ e $x_1 - x_2 \leq 0$ temos também $2x_1 \leq 0$, i.e., a solução satisfaz também a segunda restrição do primeiro sistema.

b) A determinante da submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ é -2, logo a matriz não é TU.

c) Pelo mesmo argumento do item b), a matriz não é TU.

Questão 4

a) O corte é $x_7 = -1/2 + 1/12x_6 + 11/12x_5$.

b) Temos $-1/2 + 1/12x_6 + 11/12x_5 \geq 0$. Do sistema original podemos obter as restrições

$$x_5 = -5 + 6x_1 - 4x_2$$
$$x_6 = 25 - 6x_1 - 4x_2$$

Substituindo e simplificando obtemos $5x_1 - 4x_2 \geq 3$.

c) Temos o novo sistema

$z =$	$15/2$	$-1/3x_6$	$-1/6x_5$
$x_1 =$	$5/2$	$-1/12x_6$	$+1/12x_5$
$x_4 =$	5	$-1/12x_6$	$-5/12x_5$
$x_2 =$	$5/2$	$-1/8x_6$	$-1/8x_5$
$x_3 =$	5	$-5/12x_6$	$-1/12x_5$
$x_7 =$	$-1/2$	$+1/12x_6$	$+11/12x_5$

e após o pivô x_7–x_5 temos o sistema ótimo

$$
\begin{array}{rcll}
z = & 163/22 & -7/22x_6 & -2/11x_7 \\
\hline
x_1 = & 28/11 & -1/11x_6 & +1/11x_7 \\
x_4 = & 105/22 & -1/22x_6 & -5/11x_7 \\
x_2 = & 107/44 & -5/44x_6 & -3/22x_7 \\
x_3 = & 109/22 & -9/22x_6 & -1/11x_7 \\
x_5 = & 6/11 & -1/11x_6 & +12/11x_7
\end{array}
$$

Questão 5

a) *Limitante inferior 1* Dentre as arestas que ainda podem ser utilizadas, selecionar a n-ésima menor aresta. Sendo que n é o número de arestas necessárias para completar o caminho hamiltoniano. No caso do grafo apresentado na questão. O caminho hamiltoniano precisa de 5 arestas, logo um lower bound global seria 8, a quinta menor aresta do grafo excluindo a aresta do nodo inicial para o nodo final.

Limitante inferior 2 Suponha que queiramos ligar um nodo s_2 a um nodo t passando por todos os nodos ainda não utilizados do grafo. Para todos os nodos restantes do grafo que não são s_2 e t, 2 arestas deverão ser utilizadas e para os nodos s_2 e t, apenas uma aresta deverá ser utilizada, que não liga estes dois nodos.

Devemos selecionar, portanto, a menor aresta entre todas as que passam por s_2, a menor aresta entre todas as que passam por t e a segunda menor aresta entre todas as que passam pelos demais nodos. A maior entre todas estas arestas selecionadas será um limitante inferior para o problema.

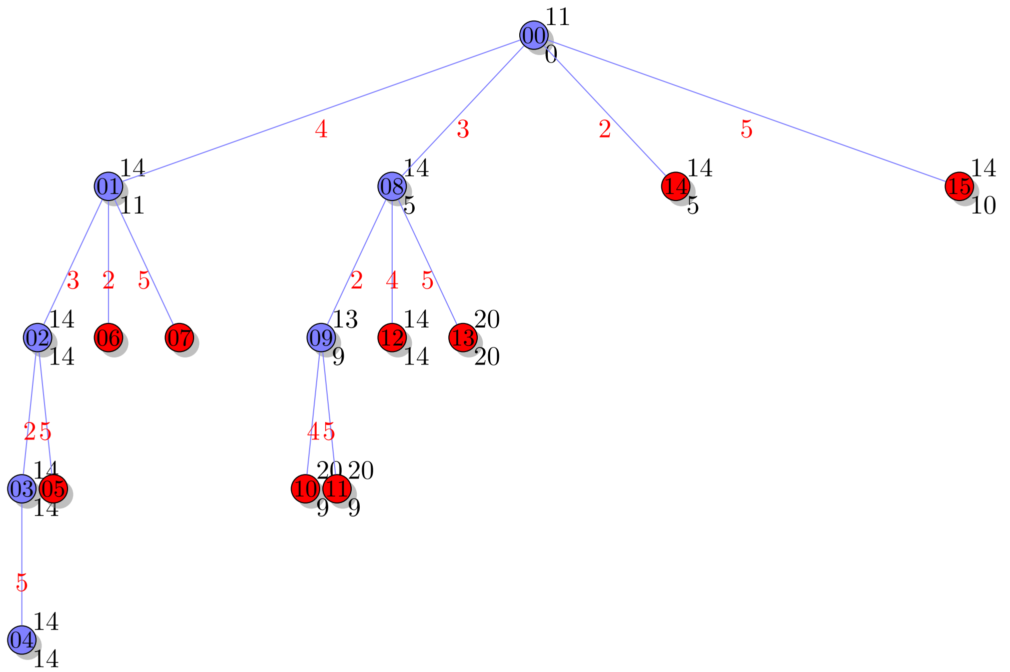
Para o exemplo dado nesta questão, selecionamos as arestas $(1,2)$,$(2,4)$,$(3,2)$,$(4,1)$,$(4,2)$ e $(6,5)$. Obtendo limitante inferior igual a 11.

Limitante superior - Iniciando do nodo inicial, selecionamos a menor aresta deste nodo para outro nodo do grafo, excetuando-se o nodo final. Repetimos este processo, escolhendo a menor aresta sainte do novo nodo selecionado. Até que só sobrem o nodo atual e o nodo final para serem visitados. Então adicionamos a aresta entre estes dois.

No caso do grafo da figura, este caminho é dado por $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6$, tendo a maior aresta igual a 15.

b) Para um nodo atual, o próximo nodo do caminho pode ser qualquer nodo ainda não utilizada na solução. Portanto, é criada uma ramificação para cada nodo ainda não utilizado no caminho atual e com isso, a partir do nodo inicial, se constrói o caminho do vendedor errante.

c) Obs.: O número ao lado direito e acima de cada nodo, representa o lower bound encontrado. O número ao lado direito e abaixo representa a maior aresta no caminho encontrado até então.



Questão 6

Para $u = 5/6$ obtemos $4x_2 + 7x_3 \leq 1$ e para $u = 3/5$ obtemos $3x_2 + 5x_3 \leq 1$.