Soluções prova 3

Questão 1

a) Seja $A = [n]$ o conjunto de atores e $I = [m]$ o conjunto de investidores. Vamos usar a variável 0–1

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{caso o ator } i \text{ faz parte do elenço} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a variável auxiliar

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{caso o produtor participa no financiamento (de acordo com o elenço atual)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Com isso podemos formular

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximiza} & \sum_{j \in I} p_j y_j - \sum_{i \in A} s_i x_i & \\ \textbf{sujeito a} & y_j \le x_i & \forall i \in L_j, j \in I \\ & x_i \in \mathbb{B} & \forall i \in A \\ & y_j \in \mathbb{B} & \forall j \in I. \end{array}$$

b) A relaxação linear do problema é

$$\begin{array}{llll} \textbf{maximiza} & \sum_{j \in I} p_j y_j - \sum_{i \in A} s_i x_i & & \\ \textbf{sujeito a} & y_j \le x_i & \forall i \in L_j, j \in I & (*) \\ & x_i \le 1 & \forall i \in A & \\ & y_j \le 1 & \forall j \in I & \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & \forall i \in A & \\ & y_j \in \mathbb{R}_+ & \forall j \in I. & \end{array}$$

A matriz de coeficientes possui dois coeficientes não-nulos em cada linha do tipo (*), um sendo 1 e outro sendo -1. As outras linhas possuem somente um coeficiente não-nulo. Logo, pela proposição 7.1-1 e a proposição 7.2 a matriz de coeficientes é TU. Como os lados direitos são inteiros a solução ótima da relaxação linear é inteira.

Questão 2

Inserindo o corte que corresponde com x_1 obtemos

$$\begin{array}{rrrr} z = & 3 & -1/2x_3 & -1/2x_4 \\ \hline x_1 = & 3/2 & -1/2x_3 & \\ x_2 = & 3/2 & & -1/2x_4 \\ x_5 = & -1/2 & +1/2x_3 & \end{array},$$

e o pivô x_5–x_3 produz

$$\begin{array}{rrrr} z = & 5/2 & -x_5 & -1/2x_4 \\ \hline x_1 = & 1 & -x_5 & \\ x_2 = & 3/2 & & -1/2x_4 \\ x_3 = & 1 & +2x_5 & \end{array}.$$

Inserindo neste sistema o corte que corresponde com x_2 obtemos

$$\begin{array}{rrrr} z = & 5/2 & -x_5 & -1/2x_4 \\ \hline x_1 = & 1 & -x_5 & \\ x_2 = & 3/2 & & -1/2x_4 \\ x_3 = & 1 & +2x_5 & \\ x_6 = & -1/2 & & +1/2x_4 \end{array}$$

e o pivô x_6–x_4 produz o sistema ótimo

$$\begin{array}{rcccc}
z = & 2 & -x_5 & -x_6 \\ \hline
x_1 = & 1 & -x_5 & \\
x_2 = & 1 & & -x_6 \\
x_3 = & 1 & +2x_5 & \\
x_4 = & 1 & & +2x_6
\end{array}.$$

Questão 3

a) A ramificação em x_3 produz os cortes $x_3 \geq 1$ e $x_3 \leq 0$. Com variável de folga nova x_8 obtemos

$$x_8 = -1 + x_3$$
$$x_8 = 0 - x_3.$$

Re-escrito para poder inserir no dicionário, substituindo $x_3 = 1/4 + 3/2x_5 - 1/4x_4 + 3/4x_6$ de acordo com a última linha do dicionário ótima obtemos os cortes

$$x_8 = -3/4 + 3/2x_5 - 1/4x_4 + 3/4x_6$$
$$x_8 = -1/4 - 3/2x_5 + 1/4x_4 - 3/4x_6.$$

(Os dois dicionários dos dois subproblemas são obtidos inserindo ou o primeiro ou o segundo corte no dicionário atual.)

b) O primeiro pivô do primeiro subproblema

$$\begin{array}{rcccc}
z = & 103/8 & -15/4x_5 & -7/8x_4 & -3/8x_6 \\ \hline
x_2 = & 1 & & & -x_6 \\
x_1 = & 1 & -x_5 & & \\
x_7 = & 3/4 & -3/2x_5 & +1/4x_4 & -3/4x_6 \\
x_3 = & 1/4 & +3/2x_5 & -1/4x_4 & +3/4x_6 \\
x_8 = & -3/4 & +3/2x_5 & -1/4x_4 & +3/4x_6
\end{array}$$

é x_8–x_6. Depois desse pivô a variável entrante recebe o valor $x_6 = 1$ e a variável sainte $x_8 = 0$. Por consequência, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_7 = 0$, $x_3 = 1$. Logo a solução é inteira. Substituindo a solução na função objetivo obtemos o valor 12.5.

O primeiro pivô do segundo subproblema

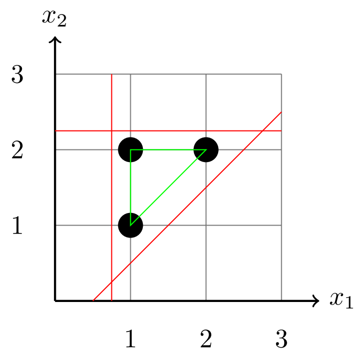
$$\begin{array}{rcccc}
z = & 103/8 & -15/4x_5 & -7/8x_4 & -3/8x_6 \\ \hline
x_2 = & 1 & & & -x_6 \\
x_1 = & 1 & -x_5 & & \\
x_7 = & 3/4 & -3/2x_5 & +1/4x_4 & -3/4x_6 \\
x_3 = & 1/4 & +3/2x_5 & -1/4x_4 & +3/4x_6 \\
x_8 = & -1/4 & -3/2x_5 & +1/4x_4 & -3/4x_6
\end{array}$$

é x_8–x_4. Depois desse pivô a variável entrante recebe o valor $x_4 = 1$ e a variável sainte $x_8 = 0$. Por consequência, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 0$, $x_8 = 0$. Logo a solução é novamente inteira e possui valor 12.

Podemos concluir que o branch-and-bound termina depois de analisar estes dois subproblemas com solução ótima $x_1 = x_3 = 1$ de valor 12.5.

Questão 4

a) Podemos demonstrar isso graficamente desenhando as restrições (em vermelho)



b) A envoltória convexa é mostrado em verde na figura acima. Ela corresponde com as restrições

$$x_1 \geq 1$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_2 \geq x_1.$$

(Nenhuma das três é redundante: sem a primeira $(0, 1)$ é viável, sem a segunda $(1, 3)$ é viável e sem a terceira $(1, 0)$ é viável.)