Prova de Recuperação: Soluções

Questão 1 (Formulação Matemática, 3pt)

Assume $V = [n]$. Deixa $x_{vi} \in \mathbb{B}$ indicar se vértice $v \in V$ possui cor $i \in [n]$. Temos a restrição de atribuição de uma cor

$$\sum_{i\in[n]} x_{vi} = 1 \qquad \forall v \in V. \tag{1}$$

Seja $y_{uvij} \in \mathbb{B}$ uma variável auxiliar indicando que aresta $a = \{u, v\}$, possui vértices adjacentes com cores $c(u) = i$ e $c(v) = j$, definido por

$$y_{uvij} \le (x_{ui} + x_{vj})/2, \qquad \forall\{u, v\} \in A, i, j \in [n], \tag{2}$$

$$y_{uvij} \ge x_{ui} + x_{vj} - 1, \qquad \forall\{u, v\} \in A, i, j \in [n]. \tag{3}$$

Com isso temos a função objetivo

$$\textbf{maximiza} \qquad \sum_{a=\{u,v\}\in A, i,j\in[n]} d_{ij} y_{uvij}. \tag{4}$$

Questão 2 (Formulação Matemática, 3pt)

Seja $y_l \in \mathbb{B}$, $l \in L$ a seleção das facilidades. O custo de abrir é

$$C_a = \sum_{l\in L} c_l y_l. \tag{5}$$

Seja $x_{cl} \in \mathbb{B}$ a atribuição de clientes a facilidades. Temos a relação

$$\sum_{c\in C} x_{cl} \le |C| y_l, \tag{6}$$

porque nenhuma facilidade vai atender mais que $|C|$ clientes, e a restrição de atendimento único

$$\sum_{l\in L} x_{cl} = 1, \qquad \forall c \in C. \tag{7}$$

Vamos representar a demanda atendidade do cliente $c \in C$ pela facilidade $l \in L$ de forma regular por d^r_{cl} e de forma excepcional por d^e_{cl}. Isso tem custos operacionais

$$C_o = \sum_{c\in C, l\in L} t_{cl} d^r_{cl} + (t_{cl} + e_{cl}) d^e_{cl}. \tag{8}$$

(Nota os custos adicinais para d^e_{cl}.) Com isso já podemos formular a função objetivo

$$\textbf{minimiza} \quad C_a + C_o. \tag{9}$$

Ainda faltam restrições sobre demandas. Primeiramente demandas podem ser atendidas somente pela facilidade selecionada:

$$d^r_{cl} + d^e_{cl} \le d_c x_{cl}, \qquad \forall c \in C, l \in L. \tag{10}$$

Depois, as demandas de todos clientes tem que ser atendidas

$$\sum_{l \in L} d^r_{cl} + d^e_{cl} = d_c, \qquad \forall c \in C. \tag{11}$$

(Nota que não é necessário formular uma restrição que da preferência para atendimento regular: com atendimento excepcional tem um custo extra, a minimização vai garantir isso.) Além disso, a demanda atendida de forma regular pela facilidade $l \in L$ não pode ultrapassar D_l, logo

$$\sum_{c \in C} d^r_{cl} \le D_l, \qquad \forall l \in L. \tag{12}$$

Questão 3 (Método Simplex, 2.5pt)

O dicionário inicial é

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & 0 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\
\hline
w_1 = & -4 & +x_1 & +x_2 & +x_3 \\
w_2 = & -6 & +2x_1 & +3x_2 & +4x_3 \\
w_3 = & -3 & +3x_1 & +2x_2 & +x_3
\end{array}$$

Podemos aplicar o método Simplex dual. O pivô w_1–x_3 resolve o problema:

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & -8 & -x_1 & -2x_2 & -2w_1 \\
\hline
x_3 = & 4 & -x_1 & -x_2 & +w_1 \\
w_2 = & 10 & -2x_1 & -x_2 & +4w_1 \\
w_3 = & 1 & +2x_1 & +x_2 & +w_1
\end{array}$$

(Existem outros caminhos via método Simplex dual; aplicando o método Simplex primal precisa uma fase I; isso é possível mas desajeitado.)

Questão 4 (Método Simplex, 1.5pt)

a) Sim, por construção sempre possui uma solução e não pode ser ilimitado.

b) Não, o sistema pode ser ilimitado.

c) Sim, o sistema pode ser ilimitado.