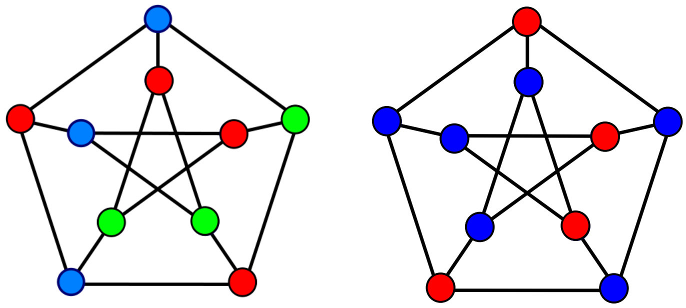

Figura 1: Esquerda: Coloração mínima do grafo de Petersen. Direita: Corte máximo do grafo de Petersen.

# Trabalho: Problemas

**Coloração de grafos** O problema consiste em achar um coloração dos vértices de um grafo não-direcionado, com o menor número de cores possíveis. Figura 1 mostra uma coloração mínima do grafo de Petersen.
Observe que nenhum grafo precisa mais cores que vértices (quais precisam exatamente este número?). Portanto podemos representar as cores com números no intervalo $[1, n]$.
A definição formal do problema é

> Coloração de grafos
>
> **Instância** Um grafo não-direcionado $G = (V, E)$.
>
> **Solução** Uma coloração do grafo, i.e. uma atribuição de cores nas vértices $c : V \to \mathbb{Z}]$ tal que cada par de vértices ligando por um arco recebe uma cor diferente.
>
> **Objetivo** Minimiza o número de cores diferentes.

O problema é NP-completo.

**Corte máximo** O objetivo é particionar um grafo não-direcionado em duas partes, tal que o número de arestas entre eles é maximizado. O problema é NP-completo (o caso de minimização é NP-completo só com restrições adicionais, por exemplo que a partições são balanceadas). Formalmente queremos resolver

> Corte máximo
>
> **Instância** Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$.
>
> **Solução** Uma partição $V_1 \dot\cup V_2 = V$ dos vértices do grafo.
>
> **Objetivo** Maximizar o número de arestas $|\{uv \in A \mid u \in V_1, v \in V_2\}|$ entre as partes.

A figura 1 mostra o corte máximo (de tamanho 12) do grafo de Petersen.

**Minimização da largura de banda de matrizes** A largura da banda de uma matriz quadrada simétrica é distância máxima da diagonal de um dos seus elementos não-zeros, com a distância do elemento $a_{ij}$ definido por $|i-j|$. Uma matriz diagonal, por exemplo, possui largura de banda 0. Para minimizar a largura da banda, podemos permutar linhas, sempre junto com as colunas correspondentes. Permutando as linhas 2 e 3 e colunas 2 e 3 da matriz com largura 2

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix} \quad \text{obtemos} \quad \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

obtemos com largura 1. Um problema equivalente é ordenar os vértices de um grafo não-direcionado linearmente de forma que a distância entre vértices adjacentes é minimizada (porquê?). Formalmente:

MINIMIZAÇÃO DA LARGURA DE BANDA DE MATRIZES

**Instância** Um grafo não-direcionado $G=(V,A)$

**Solução** Uma ordem linear $\pi: V \to [1,n]$ dos vértices.

**Objetivo** Minimizar a distância máxima $\max_{uv\in A} |\pi(u)-\pi(v)|$ entre vértices adjacentes.

Segue um grafo com duas ordens de vértices diferentes, que correspondem com as matrizes acima: