

Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Leia todas as questões antes de começar e pergunte em caso de dúvidas.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: explique o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2.5 pt)

Uma turma de n alunos vai ao teatro. Eles compraram n assentos, um do lado do outro, numa única fila. Obviamente, cada aluno vai receber um assento só, e cada assento tem capacidade para somente um aluno. Porém, não todo mundo quer sentar do lado de todo mundo (e só tem duas pontas com um único vizinho) mas prefere certos colegas. Concretamente, cada aluno $i \in [n]$ tem um conjunto de alunos $O_i \subseteq [n]$ que ele odeia, e de jeito nenhum quer sentar de lado de alguém em O_i , e um conjunto de alunos $A_i \subseteq [n]$ que ele ama, e preferiria ter como vizinhos. Formula um programa inteiro, que atribua os alunos aos assentos, tal que nenhum está do lado de alguém que ele odeia, e tal que o número total de vizinhos preferidos é maximizada. (Nota que as relações “odeiar” e “amar” não são simétricas.)

Questão 2 (Formulação, 2.5 pt)

Queremos preencher um tabuleiro de tamanho $n \times n$ com os sinais “+” ou “-”. A condição é que cada sinal possui exatamente um vizinho com sinal oposto. Como vizinho contam os 4 quadros de cima, de baixo, de esquerda e de direita (se existir). Formula um programa inteiro, que encontra uma solução que satisfaz essa condição e que maximiza o número de sinais “+”.

Questão 3 (Análise de sensibilidade, 3 pt)

No primeiro laboratório estudamos o problema

Fritz Assad é gerente de produção da companhia de alimentos G. Ladeira, que processa batatas em embalagens de batatinha frita, picadinho de batata e flocos para purê. No início do processo de fabricação, as batatas em bruto são classificadas por comprimento e qualidade e, então, distribuídas a linhas de produção separadas.

Assad pode comprar batatas de duas fontes, que diferem no sortimento dos vários tamanhos e qualidades. Estas características de produção são mostradas na Tabela 1. Observe que, da Fonte 1, há uma produção de 20% de batatinha frita, uma produção de 20% de picadinho e uma produção de 30% de flocos; os restantes 30% são refugo irre recuperável. Os números para flocos e refugo são também 30% para as batatas da Fonte 2, mas a produção de batatinha frita é relativamente maior.

Uma formulação do problema é

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Tabela 1: Produções de batata e lucro.

Produto	Fonte 1	Fonte 2	Limitação de vendas [t]
Batatinha frita	0,2	0,3	1,8
Picadinho	0,2	0,1	1,2
Flocos	0,3	0,3	2,4
Lucro por tonelada [R\$]	5	6	

com dicionário inicial

$$\begin{array}{r} z = 0 \quad +5x_1 \quad +6x_2 \\ \hline x_3 = 18 \quad -2x_1 \quad -3x_2 \\ x_4 = 12 \quad -2x_1 \quad -x_2 \\ x_5 = 24 \quad -3x_1 \quad -3x_2 \end{array}$$

e dicionário ótimo

$$\begin{array}{r} z = 81/2 \quad -3/4x_4 \quad -7/4x_3 \\ \hline x_2 = 3 \quad +1/2x_4 \quad -1/2x_3 \\ x_1 = 9/2 \quad -3/4x_4 \quad +1/4x_3 \\ x_5 = 3/2 \quad +3/4x_4 \quad +3/4x_3 \end{array}$$

Agora o Fritz Assad quer saber:

- Em qual intervalo o lucro por tonelada do Fonte 1 pode variar?
- Qual o novo valor do lucro total em função do lucro do Fonte 1 neste intervalo?
- Aumentar a limitação de vendas de 1.8 toneladas para batatinha frita para um valor maior daria um lucro maior? (Nota que na formulação as toneladas foram multiplicadas por 10.)

Questão 4 (Dualidade, 2 pt)

- Qual a solução dual ótima do problema da questão 3?
- Explique brevemente o teorema das folgas complementares e usa a soluções primais e duais ótimas da questão 3 para demonstrar que o teorema é satisfeito neste exemplo.

Dica:

Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$\begin{aligned} z &= z^* - (y_N^*)^t x_N \\ x_B &= x_B^* - B^{-1} N x_N \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} x_B^* &= B^{-1} b \\ y_N^* &= (B^{-1} N)^t c_B - c_N \\ z^* &= c_B^t B^{-1} b \end{aligned}$$