INF05010 – Algoritmos avançados
Notas de aula

Marcus Ritt

5 de Agosto de 2021

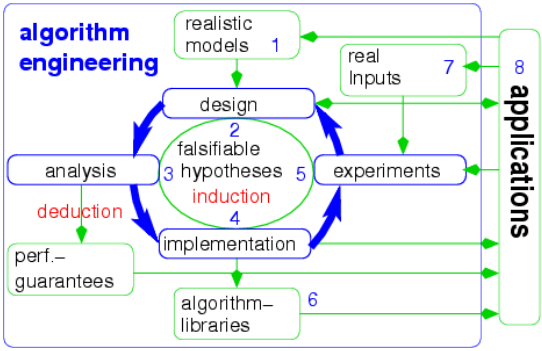
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

Agradecimentos Agradeço os estudantes dessa disciplina por críticas e comentários e em particular o Rafael de Santiago por diversas correções e sugestões.

Conteúdo

Introdução

A disciplina "Algoritmos avançados" foi criada para combinar a teoria e a prática de algoritmos. Muitas vezes a teoria de algoritmos e a prática de implementações eficientes é ensinado separadamente, em particular no caso de algoritmos avançados. Porém a experiência mostra que encontramos muitos obstáculos no caminho de um algoritmo teoricamente eficiente para uma implementação eficiente. Além disso, o projeto de algoritmos novos não termina com uma implementação eficiente, mas é alimentado pelos resultados experimentais para produzir melhores algoritmos. A figura abaixo mostra o ciclo típico da área emergente de *engenharia de algoritmos*.



Engenharia de algoritmos (*Algorithm Engineering* s.d.).

Seguindo essa filosofia, o nosso objetivo e tanto entender a teoria de algoritmos, demonstrado a sua corretude e analisando a sua complexidade, quanto dominar a prática de algoritmos, a sua implementação e avaliação experimental. Isso é refletido numa sequência alternada de aulas teóricas a praticas.

1. Algoritmos em grafos

1.1. Representação de grafos

Um grafo pode ser representado diretamente de acordo com a sua definição por n estruturas que representam os vértices, m estruturas que representam os arcos e ponteiros entre as estruturas. Um vértice possui ponteiros para todo arco incidente sainte ou entrante, e um arco possui ponteiros para o início e término. A representação direta possui várias desvantagens. Por exemplo não temos acesso direto aos vértices para inserir um arco.

Duas representações simples são listas (ou vetores) não-ordenadas de vértices ou arestas. Uma outra representação simples de um grafo G com n vértices é uma *matriz de adjacência* $M = (m_{ij}) \in \mathbb{B}^{n \times n}$. Para vértices u, v o elemento $m_{uv} = 1$ caso existe uma arco entre u e v. Para representar grafos não-direcionados mantemos $m_{uv} = m_{vu}$, i.e., M é simétrico. A representação permite um teste de adjacência em $O(1)$. Percorrer todos vizinhos de um dado vértice v custa $O(n)$. O custo alto de espaço de $\Theta(n^2)$ restringe o uso de uma matriz de adjacência para grafos pequenos[1].

Uma representação mais eficiente é por *listas* ou *vetores* de adjacência. Neste caso armazenamos para cada vértice os vizinhos em uma lista ou um vetor. As listas ou vetores mesmos podem ser armazenados em uma lista ou um vetor global. Com isso a representação ocupa espaço $\Theta(n + m)$ para m arestas.

Uma escolha comum é um vetor de vértices que armazena listas de vizinhos. Esse estrutura permite uma inserção e deleção simples de arcos. Para facilitar a deleção de um vértice em grafos não-direcionados, podemos armazenar junto com o vizinho u do vértice v a posição do vizinho v do vértice u. A representação dos vizinhos por vetores é mais eficiente, e por isso preferível caso a estrutura do grafo é estático (Black Jr. e Martel, 1998; Park, Penner e Prasanna, 2004).

Caso escolhemos armazenar os vértices em uma lista dupla, que armazena uma lista dupla de vizinhos, em que os vizinhos são representados por posições da primeira lista, obtemos uma *lista dupla de arcos* (ingl. doubly connected arc list, DCAL). Essa estrutura permite uma inserção e remoção tanto de vértices quanto de arcos.

Supõe que $V = [n]$. Uma outra representação compacta e eficiente conhecido como *forward star* para grafos estáticos usa um *vetor de arcos* $a_1, \ldots, a_m$.

[1] Ainda mais espaço consuma uma *matrix de incidência* entre vértices e arestas em $\mathbb{B}^{n \times m}$.

Tabela 1.1.: Operações típicas em grafos.

Operação	Lista de arestas	Lista de vértices	Matriz de adjacência	Lista de adjacência
Inserir aresta	$O(1)$	$O(n+m)$	$O(1)$	$O(1)$ ou $O(n)$
Remover aresta	$O(m)$	$O(n+m)$	$O(1)$	$O(n)$
Inserir vértice	$O(1)$	$O(1)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Remover vértice	$O(m)$	$O(n+m)$	$O(n^2)$	$O(n+m)$
Teste $uv \in E$	$O(m)$	$O(n+m)$	$O(1)$	$O(\Delta)$
Percorrer vizinhos	$O(m)$	$O(\Delta)$	$O(n)$	$O(\Delta)$
Grau de um vértice	$O(m)$	$O(\Delta)$	$O(n)$	$O(1)$

Mantemos a lista de arestas ordenado pelo começo do arco. Uma permutação σ nos dá as arestas em ordem do término. (O uso de uma permutação serve para reduzir o consumo de memória.) Para percorrer eficientemente os vizinhos de um vértice armazenamos o índice s_v do primeiro arco sainte na lista de arestas ordenado pelo começo e o índice e_v do primeiro arco entrante na lista de arestas ordenado pelo término com $s_{n+1} = e_{n+1} = m + 1$ por definição. Com isso temos $N^+(v) = \{a_{s_v}, \ldots, a_{s_{v+1}-1}\}$ com $\delta_v^+ = s_{v+1} - s_v$, e $N^-(v) = \{a_{\sigma(e_v)}, \ldots, a_{\sigma(e_{v+1}-1)}\}$ com $\delta_v^- = e_{v+1} - e_v$. A representação precisa espaço $O(n+m)$.
Tabela 1.1 mostra a complexidade de operações típicas nas diferentes representações.

1.2. Caminhos e ciclos Eulerianos

Um *caminho Euleriano* passa por toda arestas de grafo exatamente uma vez. Um caminho Euleriano fechado é um ciclo Euleriano. Um grafo é *Euleriano* caso ele possui um ciclo Euleriano que passa por cada vértice (pelo menos uma vez).

Proposição 1.1
Uma grafo não-direcionado $G = (V, E)$ é Euleriano sse G é conectado e cada vértice tem grau par.

Prova. Por indução sobre o número de arestas. A base da indução é um grafo com um vértice e nenhuma aresta que satisfaz a proposição. Supõe que os grafos com $\leq m$ arestas satisfazem a proposição e temos um grafo G com $m+1$ arestas. Começa por um vértice v arbitrário e procura um caminho que nunca passa duas vezes por uma aresta até voltar para v. Isso sempre é possível

porque o grau de cada vértice é par: entrando num vértice sempre podemos sair. Removendo este caminho do grafo, obtemos uma coleção de componentes conectados com menos que m arestas, e pela hipótese da indução existem ciclos Eulerianos em cada componente. Podemos obter um ciclo Euleriano para o grafo original pela concatençaõ desses ciclos Eulerianos. ■

Pela prova temos o seguinte algoritmo com complexidade $O(|E|)$ para encontrar um ciclo Euleriano na componente de $G = (V, E)$ que contém $v \in V$:

Algoritmo 1.1 (Caminho Euleriano)

```
1   Euler(G = (V,E), v ∈ V) :=
2   if |E| = 0 return v
3   procura um caminho começando em v
4     sem repetir arestas voltando para v
5   seja v = v_1, v_2, ..., v_n = v esse caminho
6   remove as arestas v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n de G
7     para obter G_1
8   return Euler(G_1, v_1) + ··· + Euler(G_{n-1}, nv_{n-1}) + v_n
9   // Usamos + para concatenação de caminhos.
10  // G_i é G_{i-1} com as arestas do
11  //   caminho Euler(G_{i-1}, v_{i-1}) removidos, i.e
12  //   G_i := (V, E(G_{i-1}) \ E(Euler(G_{i-1}, v_{i-1})))
```

Algoritmo 1.1 é de Hierholzer (1873).

1.3. Filas de prioridade e heaps

Uma fila de prioridade mantem um conjunto de chaves com prioridades de forma que a atualizar prioridades e acessar o elemento de menor prioridade é eficiente. Ela possui aplicações em algoritmos para calcular árvores geradores mínimas, caminhos mais curtos de um vértice para todos outros (algoritmo de Dijkstra) e em algoritmos de ordenaçao (heapsort).

Exemplo 1.1
Árvore geradora mínima através do algoritmo de Prim.

Algoritmo 1.2 (Árvore geradora mínima)
Entrada Um grafo conexo não-orientado ponderado $G = (V, E, c)$

Saída Uma árvore $T \subseteq E$ de menor custo total.

```
1  V' := {v0} para um v0 ∈ V
2  T := ∅
3  while V' ≠ V do
4     escolhe e = {u,v} com custo mínimo
5        entre V' e V \ V' (com u ∈ V', v ∈ V \ V')
6     V' := V' ∪ {v}
7     T := T ∪ {e}
8  end while
```

Algoritmo 1.3 (Prim refinado)
Implementação mais concreta:

```
1  T := ∅
2  for u ∈ V \ {v} do
3     if u ∈ N(v) then
4        value(u) := c_uv
5        pred(u) := v
6     else
7        value(u) := ∞
8     end if
9     insert(Q, (value(u), u)) { pares (chave,elemento) }
10 end for
11 while Q ≠ ∅ do
12    v := deletemin(Q)
13    T := T ∪ {pred(v)v}
```

```
14    for u ∈ N(v) do
15    if u ∈ Q e c_vu < value(u) then
16          value(u) := c_uv
17          pred(u) := v
18          update(Q, u, c_vu)
19        end if
20    end for
21  end while
```

Custo? $n \times$ insert $+ n \times$ deletemin $+ m \times$ update.

$\Diamond$

Observação 1.1
Implementação com vetor de distâncias: insert $= O(1)$[2], deletemin $= O(n)$, update $= O(1)$, e temos custo $O(n + n^2 + m) = O(n^2 + m)$. Isso é assintoticamente ótimo para grafos densos, i.e. $m = \Omega(n^2)$. $\Diamond$

Observação 1.2
Implementação com lista ordenada: insert $= O(n)$, deletemin $= O(1)$, update $= O(n)$, e temos custo $O(n^2 + n + mn) = O(mn)$[3]. $\Diamond$

Observação 1.3
Implementação com uma lista de $\sqrt{n}$ blocos de $\sqrt{n}$ elementos, insert, deletemin e update podem ser implementados em tempo $O(\sqrt{n})$, logo o algoritmo de Prim e de Dijkstra tem complexidade $O(m\sqrt{n})$. $\Diamond$

Exemplo 1.2
Caminhos mais curtos com o algoritmo de Dijkstra

Algoritmo 1.4 (Dijkstra)
Entrada Grafo $G = (V, E)$ com pesos $c_e \geq 0$ nas arestas $e \in E$, e um vértice $s \in V$.

Saída A distância mínima d_v entre s e cada vértice $v \in V$.

```
1  d_s := 0; d_v := ∞, ∀v ∈ V \ {s}
2  visited(v) := false, ∀v ∈ V
3  Q := ∅
4  insert(Q, (s, 0))
5  while Q ≠ ∅ do
```

[2]Com chaves compactas $[1, n]$.
[3]Na hipótese razoável que $m \geq n$

```
 6    v := deletemin(Q)
 7    visited(v) := true
 8    for u ∈ N(v) do
 9      if not visited(u) then
10        if d_u = ∞ then
11          d_u := d_v + d_vu
12          insert(Q, (u, d_u))
13        else if d_v + d_vu < d_u
14          d_u := d_v + d_vu
15          update(Q, (u, d_u))
16        end if
17      end if
18    end for
19  end while
```

A fila de prioridade contém pares de vértices e distâncias.

Proposição 1.2
O algoritmo de Dijkstra possui complexidade

$$O(n) + n \times \text{deletemin} + n \times \text{insert} + m \times \text{update}.$$

Prova. O pré-processamento (1-3) tem custo $O(n)$. O laço principal é dominado por no máximo n operações insert, n operações deletemin, e m operações update. A complexidade concreta depende da implementação desses operações. ■

Proposição 1.3
O algoritmo de Dijkstra é correto.

Prova. Seja $\text{dist}(s, x)$ a menor distância entre s e x. Provaremos por indução que para cada vértice v selecionado na linha 6 do algoritmo $d_v = \text{dist}(s, x)$. Como base isso é correto para $v = s$. Seja $v \neq s$ um vértice selecionado na linha 6, e supõe que existe um caminho $P = s \cdots xy \cdots v$ de comprimento menor que d_v, tal que y é o primeiro vértice que não foi processado (i.e. selecionado na linha 6) ainda. (É possível que $y = v$.) Sabemos que

$$\begin{aligned}
d_y &\leq d_x + d_{xy} && \text{porque } x \text{ já foi processado} \\
&= \text{dist}(s, x) + d_{xy} && \text{pela hipótese } d_x = \text{dist}(s, x) \\
&\leq d(P) && d_P(s, x) \geq \text{dist}(s, x) \text{ e } P \text{ passa por } xy \\
&< d_v, && \text{pela hipótese}
\end{aligned}$$

uma contradição com a minimalidade do elemento extraído na linha 6. (Notação: $d(P)$: distância total do caminho P; $d_P(s,x)$: distância entre s e x no caminho P.) ■ ◊

Observação 1.4
Podemos ordenar n elementos usando um heap com n operações "insert" e n operações "deletemin". Pelo limite de $\Omega(n \log n)$ para ordenação via comparação, podemos concluir que o custo de "insert" mais "deletemin" é $\Omega(\log n)$. Portanto, pelo menos uma das operações é $\Omega(\log n)$. ◊

O caso médio do algoritmo de Dijkstra Dado um grafo $G = (V, E)$ e um vértice inicial arbitrário supõe que temos um conjunto $C(v)$ de pesos positivos com $|C(v)| = |N^-(v)|$ para cada $v \in V$. Atribuiremos permutações dos pesos em $C(v)$ aleatoriamente para os arcos entrantes em v.

Proposição 1.4 (Noshita (1985))
O algoritmo de Dijkstra chama update em média $n \log(m/n)$ vezes neste modelo.

Prova. Para um vértice v os arcos que podem levar a uma operação update em v são de forma (u, v) com $\text{dist}(s, u) \leq \text{dist}(s, v)$. Supõe que existem k arcos $(u_1, v), \ldots, (u_k, v)$ desse tipo, ordenado por $\text{dist}(s, u_i)$ não-decrescente. Independente da atribuição dos pesos aos arcos, a ordem de processamento é o mesmo. O arco (u_i, v) leva a uma operação update caso

$$\text{dist}(s, u_i) + d_{u_i v} < \min_{j:j<i} \text{dist}(s, u_j) + d_{u_j v}.$$

Com isso temos $d_{u_i v} < \min_{j:j<i} d_{u_j v}$, i.e., $d_{u_i v}$ é um mínimo local na sequência dos pesos dos k arcos. O número esperado de máximos locais de uma permutação aleatória é $H_k - 1 \leq \ln k$ e considerando as permutações inversas, temos o mesmo número de mínimos locais. Como $k \leq \delta^-(v)$ temos um limite superior para o número de operações update em todos vértices de

$$\sum_{v \in V} \ln \delta^-(v) = n \sum_{v \in V} (1/n) \ln \delta^-(v) \leq n \ln \sum_{v \in V} (1/n)\delta^-(v) = n \ln m/n.$$

A desigualdade é justificada pela equação (A.6) observando que $\ln n$ é concava. ■

Com isso complexidade média do algoritmo de Dijkstra é

$$O(m + n \times \text{deletemin} + n \times \text{insert} + n \ln(m/n) \times \text{update}).$$

Usando uma fila de prioridade implementada por um heap binário que executa todas operações em $O(\log n)$ a complexidade média do algoritmo de Dijkstra é $O(m + n \log m/n \log n)$.

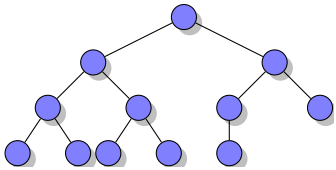
1.3.1. Heaps binários

Teorema 1.1
Uma fila de prioridade pode ser implementado com custo insert = $O(\log n)$, deletemin = $O(\log n)$, update = $O(\log n)$. Portanto, uma árvore geradora mínima pode ser calculado em tempo $O(n \log n + m \log n)$.

Um *heap* é uma árvore com chaves nos vértices que satisfazem um critério de ordenação.

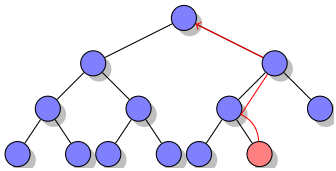
- *min-heap*: as chaves dos filhos são maior ou igual que a chave do pai;
- *max-heap*: as chaves dos filhos são menor ou igual que a chave do pai.

Um *heap* binário é um heap em que cada vértice possui no máximo dois filhos. Implementaremos uma fila de prioridade com um heap binário *completo*. Um heap completo fica organizado de forma que possui folhas somente no último nível, da esquerda para direita. Isso garante uma altura de $O(\log n)$.



Positivo: Achar a chave com valor mínimo (operação findmin) custa $O(1)$. Como implementar a inserção? Idéia: Colocar na última posição e restabelecer a propriedade do min-heap, caso a chave é menor que a do pai.

```
1  insert(H,c) :=
2    insere c na última posição p
3    heapify-up(H,p)
4
5  heapify-up(H,p) :=
6    if root(p) return
7    if key(parent(p))>key(p) then
8      swap(key(parent(p)),key(p))
9      heapify-up(H,parent(p))
10   end if
```

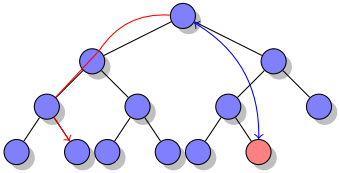


Lema 1.1
Seja T um min-heap. Decremente a chave do nó p. Após heapify-up(T, P) temos novamente um min-heap. A operação custa $O(\log n)$.

Prova. Por indução sobre a profundidade k de p. Caso $k = 1$: p é a raiz, após o decremento já temos um min-heap e heapify-up não altera ele. Caso $k > 1$: Seja c a nova chave de p e d a chave de parent(p). Caso $d \leq c$ já temos um min-heap e heapify-up não altera ele. Caso $d > c$ heapify-up troca c e d e chama heapify-up(T,parent(p)) recursivamente. Podemos separar a troca em dois passos: (i) copia d para p. (ii) copia c para parent(p). Após passo (i) temos um min-heap T' e passo (ii) diminui a chave de parent(p) e como a profundidade de parent(p) é $k-1$ obtemos um min-heap após da chamada recursiva, pela hipótese da indução.
Como a profundidade de T é $O(\log n)$, o número de chamadas recursivas também é, e como cada chamada tem complexidade $O(1)$, heapify-up tem complexidade $O(\log n)$. ■

Como remover? A idéia básica é a mesma: troca a chave com a menor chave dos filhos. Para manter o heap completo, colocaremos primeiro a chave da última posição na posição do elemento removido.

```
1  delete(H,p):=
2    troca última posição com p
3    heapify-down(H,p)
4
5  heapify-down(H,p):=
6    if p não possui filhos return
7    if p possui um filho then
8      if key(left(p))<key(p)) then swap(key(left(p)),key(p))
9      return
10   end if
11   { p possui dois filhos }
12   if key(p)>key(left(p)) or key(p)>key(right(p)) then
13     if (key(left(p))<key(right(p)) then
14       swap(key(left(p)),key(p))
15       heapify-down(H,left(p))
16     else
17       swap(key(right(p)),key(p))
18       heapify-down(H,right(p))
19     end if
20   end if
```



Lema 1.2
Seja T um min-heap. Incremente a chave do nó p. Após heapify-down(T, p) temos novamente um min-heap. A operação custa $O(\log n)$.

Prova. Por indução sobre a altura k de p. Caso $k = 1$, p é uma folha e após o incremento já temos um min-heap e heapify-down não altera ele. Caso $k > 1$: Seja c a nova chave de p e d a chave do menor filho f. Caso $c \leq d$ já temos um min-heap e heapify-down não altera ele. Caso $c > d$ heapify-down troca c e d e chama heapify-down(T,f) recursivamente. Podemos separar a troca em dois passos: (i) copia d para p. (ii) copia c para f. Após passo (i) temos um min-heap T' e passo (ii) aumenta a chave de f e como a altura de f é $k-1$, obtemos um min-heap após da chamada recursiva, pela hipótese da indução. Como a altura de T é $O(\log n)$ o número de chamadas recursivas também, e como a cada chamada tem complexidade $O(1)$, heapify-up tem complexidade $O(\log n)$. ■

Última operação: atualizar a chave.

```
1  update(H,p,v) :=
2    if v < key(p) then
3      key(p):=v
4      heapify-up(H,p)
5    else
6      key(p):=v
7      heapify-down(H,p)
8    end if
```

Sobre a implementação Uma árvore binária completa pode ser armazenado em um vetor v que contém as chaves. Um pontador p a um elemento é simplesmente o índice no vetor. Caso o vetor contém n elementos e possui índices a partir de 0 podemos definir

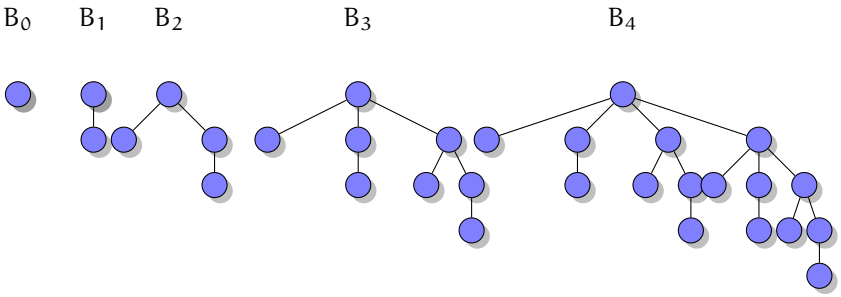
```
1  root(p) := return p = 0
2  parent(p) := return ⌊(p − 1)/2⌋
3  key(p) := return v[p]
4  left(p) := return 2p + 1
5  right(p) := return 2p + 2
6  numchildren(p) := return max(min(n − left(p), 2), 0)
```

Outras observações:

- Para chamar update, temos que conhecer a posição do elemento no heap. Para um conjunto de chaves compactos $[0, n)$ isso pode ser implementado usando um vetor pos, tal que $\texttt{pos}[c]$ é o índice da chave c no heap.
- A fila de prioridade não possui teste $u \in Q$ (linha 15 do algoritmo 1.3) eficiente. O teste pode ser implementado usando um vetor visited, tal que visited$[u]$ sse $u \notin Q$.

1.3.2. Heaps binomiais

Um heap binomial é um coleção de *árvores binomiais* que satisfazem a ordenação de um heap. A árvore binomial B_0 consiste de um único vértice. A árvore binomial B_i possui uma raiz com filhos $B_0, \ldots, B_{i-1}$. O *posto* de B_k é k. Um heap binomial contém no máximo uma árvore binomial de cada posto.

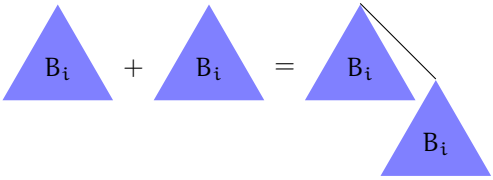


Lema 1.3
Uma árvore binomial tem as seguintes características:

1. B_n possui 2^n vértices, 2^{n-1} folhas (para $n > 0$), e tem altura $n + 1$.
2. O nível k de B_n (a raiz tem nível 0) tem $\binom{n}{k}$ vértices. (Isso explica o nome.)

Prova. Exercício. ■

Observação 1.5
Podemos combinar dois B_i obtendo um B_{i+1} e mantendo a ordenação do heap: Escolhe a árvore com menor chave na raiz, e torna a outra filho da primeira. Chamaremos essa operação "link". Ela tem custo $O(1)$ (veja observações sobre a implementação).



◊

Observação 1.6
Um B_i possui 2^i vértices. Um heap com n chaves consiste em $O(\log n)$ árvores. Isso permite juntar dois heaps binomiais em tempo $O(\log n)$. A operação é semelhante à soma de dois números binários com "carry". Começa juntar os B_0. Caso tem zero, continua, case tem um, inclui no heap resultante. Caso tem dois o heap resultante não recebe um B_0. Define como "carry" o link dos dois B_0's. Continua com os B_1. Sem tem zero ou um ou dois, procede como no caso dos B_0. Caso tem três, incluindo o "carry", inclui um no resultado, e define como "carry" o link dos dois restantes. Continue desse forma com os restantes árvores. Para heaps h_1, h_2 chamaremos essa operação meld(h_1,h_2).
◊

Com a operação meld, podemos definir as seguintes operações:

- makeheap(c): Retorne um B_0 com chave c. Custo: $O(1)$.
- insert(h,c): meld(h,makeheap(c)). Custo: $O(\log n)$.
- getmin(h): Mantendo um link para a árvore com o menor custo: $O(1)$.
- deletemin(h): Seja B_k a árvore com o menor chave. Remove a raiz. Define dois heaps: h_1 é h sem B_k, h_2 consiste dos filhos de B_k, i.e. $B_0, \ldots, B_{k-1}$. Retorne meld(h_1,h_2). Custo: $O(\log n)$.
- updatekey(h,p,c): Como no caso do heap binário completo com custo $O(\log n)$.
- delete(h,c): decreasekey(h,c,$-\infty$); deletemin(h)

Em comparação com um heap binário completo ganhamos nada no caso pessimista. De fato, a operação insert possui complexidade pessimista $O(1)$ *amortizada*. Um insert individual pode ter custo $O(\log n)$. Do outro lado, isso acontece raramente. Uma análise amortizada mostra que em média sobre uma série de operações, um insert só custa $O(1)$. Observe que isso não é uma análise da complexidade média, mas uma análise da complexidade pessimista de uma série de operações.

Análise amortizada

Exemplo 1.3

Temos um contador bin rio com k bits e queremos contar de 0 at $2^k - 1$. An lise "tradicional": um incremento tem complexidade $O(k)$, porque no caso pior temos que alterar k bits. Portanto todos incrementos custam $O(k2^k)$. An lise amortizada: "Poupamos" opera es extras nos incrementos simples, para "gast -las" nos incrementos caros. Concretamente, setando um bit, gastamos duas opera es, uma para setar, outra seria "poupada". Incrementando, usaremos as opera es "poupadas" para zerar bits. Desta forma, um incremento custa $O(1)$ e temos custo total $O(2^k)$.

Uma outra forma da an lise amortizada atrav s uma *fun o potencial* φ, que associa a cada estado de uma estrutura de dados um valor positivo (a "poupan a"). O custo amortizado de uma opera o que transforma uma estrutura e_1 em uma estrutura e_2 e $c - \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$, com c o custo de opera o. No exemplo do contador, podemos usar como $\varphi(i)$ o n mero de bits na representa o bin rio de i. Agora, se temos um estado e_1

$$\underbrace{11\cdots1}_{\text{p bits um}}\,0\quad\underbrace{\cdots}_{\text{q bits um}}$$

com $\varphi(e_1) = p + q$, o estado ap s de um incremento

$$\underbrace{00\cdots0}_{0}\,1\,\underbrace{\cdots}_{q}$$

com $\varphi(e_2) = 1 + q$. O incremento custa $c = p + 1$ opera es e portanto o custo amortizado

$$c - \varphi(e_1) + \varphi(e_2) = p + 1 - p - q + 1 + q = 2 = O(1).$$

$\Diamond$

Resumindo: Dado um s rie de chamadas de uma opera o com custos $c_1, \ldots, c_n$ o custo amortizado da opera o $\sum_{1\le i\le n} c_i/n$. Caso temos m opera es diferentes, o custo amortizado da opera o que ocorre nos ndices $J \subseteq [1, m]$ $\sum_{i\in J} c_i/|J|$.

As somas podem ser dif ceis de avaliar diretamente. Um m todo para simplificar o c lculo do custo amortizado o *m todo potencial*. Acha uma *fun o potencial* φ que atribui cada estrutura de dados antes da opera o i um valor n o-negativo $\varphi_i \ge 0$ e normaliza ela tal que $\varphi_1 = 0$. Atribui um custo amortizado

$$a_i = c_i - \varphi_i + \varphi_{i+1}$$

a cada opera o. A soma dos custos n o ultrapassa os custos originais, porque

$$\sum a_i = \sum c_i - \varphi_i + \varphi_{i+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_1 + \sum c_i \geq \sum c_i$$

Portanto, podemos atribuir a cada tipo de opera o $J \subseteq [1, m]$ o custo amortizado $\sum_{i \in J} a_i/|J|$. Em particular, se cada opera o individual $i \in J$ tem custo amortizado $a_i \leq F$, o custo amortizado desse tipo de opera o F.

Exemplo 1.4
Queremos implementar uma tabela din mica para um n mero desconhecido de elementos. Uma estrat gia reserver espa o para n elementos, manter a ltima posi o livre p, e caso $p > n$ alocara uma nova tabela de tamanho maior. Uma implementa o dessa ideia

```
1  insert(x):=
2    if p > n then
3      aloca nova tabela de tamanho t = max{2n, 1}
4      copia os elementos x_i, 1 ≤ i < p para nova tabela
5      n := t
6    end if
7    x_p := x
8    p := p + 1
```

com valores iniciais $n := 0$ e $p := 0$. O custo de insert $O(1)$ caso existe ainda espa o na tabela, mas $O(n)$ no pior caso.
Uma an lise amortizada mostra que a complexidade amortizada de uma opera o $O(1)$. Seja Cn o custo das linhas 3–5 e D o custo das linhas 7–8. Escolhe a fun o potencial $\varphi(n) = 2Cp - Dn$. A fun o φ satisfaz os crit rios de um potencial, porque $p \geq n/2$, e inicialmente temos $\varphi(0) = 0$. Com isso o custo amortizado caso tem espa o na tabela

$$\begin{aligned} a_i &= c_i - \varphi(i-1) + \varphi(i) \\ &= D - (2C(p-1) - Dn) + (2Cp - Dn) = C + 2C = O(1). \end{aligned}$$

Caso temos que alocar uma nova tabela o custo

$$\begin{aligned} a_i &= c_i - \varphi(i-1) + \varphi(i) = D + Cn - (2C(p-1) - Dn) + (2Cp - 2Dn) \\ &= C + Dn + 2C - Dn = O(1). \end{aligned}$$

◊

Custo amortizado do heap binomial Nosso potencial no caso do heap binomial é o número de árvores no heap. O custo de getmin e updatekey não

altera o potencial e por isso permanece o mesmo. makeheap cria uma árvore que custa mais uma operação, mas permanece $O(1)$. deletemin pode criar $O(\log n)$ árvores novas, porque o heap contém no máximo um $B_{\lceil \log n \rceil}$ que tem $O(\log n)$ filhos, e permanece também com custo $O(\log n)$. Finalmente, insert reduz o potencial para cada link no meld e portanto agora custa somente $O(1)$ amortizado, com o mesmo argumento que no exemplo 1.3.

Desvantagem: a complexidade (amortizada) assintótica de calcular uma árvore geradora mínima permanece $O(n \log n + m \log n)$.

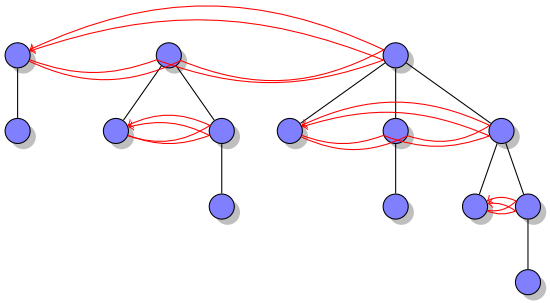
Meld preguiçosa Ao invés de reorganizar os dois heaps em um meld, podemos simplesmente concatená-los em tempo $O(1)$. Isso pode ser implementado sem custo adicional nas outras operações. A única operação que não tem complexidade $O(1)$ é deletemin. Agora temos uma coleção de árvores binomiais não necessariamente de posto diferente. O deletemin reorganiza o heap, tal que obtemos um heap binomial com árvores de posto único novamente. Para isso, mantemos um vetor com as árvores de cada posto, inicialmente vazio. Sequencialmente, cada árvore no heap, será integrado nesse vetor, executando operações link só for necessário. O tempo amortizado de deletemin permanece $O(\log n)$.

Usaremos um potencial φ que é o dobro do número de árvores. Supondo que antes do deletemin temos t árvores e executamos l operações link, o custo amortizado é

$$(t + l) - 2t + 2(t - l) = t - l.$$

Mas $t - l$ é o número de árvores depois o deletemin, que é $O(\log n)$, porque todas árvores possuem posto diferente.

Sobre a implementação Um forma eficiente de representar heaps binomiais, é em forma de apontadores. Além das apontadores dos filhos para o os pais, cada pai possui um apontador para um filho e os filhos são organizados em uma lista encadeada dupla. Mantemos uma lista encadeada dupla também das raízes. Desta forma, a operação link pode ser implementada em $O(1)$.



1.3.3. Heaps Fibonacci

Um heap Fibonacci é uma modificação de um heap binomial, com uma operação decreasekey de custo $O(1)$. Com isso, uma árvore geradora mínima pode ser calculada em tempo $O(m + n \log n)$. Para conseguir decreasekey em $O(1)$ não podemos mais usar heapify-up, porque heapify-up custa $O(\log n)$.
Primeira tentativa:

- delete(h,p): Corta p de h e executa um meld entre o resto de h e os filhos de p. Uma alternativa é implementar delete(h,p) como decreasekey(h,p,$-\infty$) e deletemin(h).
- decreasekey(h,p): A ordenação do heap pode ser violada. Corta p é execute um meld entre o resto de h e p.

Problema com isso: após de uma série de operações delete ou decreasekey, a árvore pode se tornar "esparso", i.e. o número de vértices não é mais exponencial no posto da árvore. A análise da complexidade das operações como deletemin depende desse fato para garantir que temos $O(\log n)$ árvores no heap. Consequência: Temos que garantir, que uma árvore não fica "podado" demais. Solução: Permitiremos cada vértice perder no máximo dois filhos. Caso o segundo filho é removido, cortaremos o próprio vértice também. Para cuidar dos cortes, cada nó mantém ainda um valor booleana que indica, se já foi cortado um filho. Observe que um corte pode levar a uma série de cortes e por isso se chama de corte em cascatas (ingl. cascading cuts). Um corte em cascata termina na pior hipótese na raiz. A raiz é o único vértice em que permitiremos cortar mais que um filho. Por isso não mantemos flag na raiz.

Implementações Denotamos com h um heap, c uma chave e p um elemento do heap. minroot(h) é o elemento do heap que correspondo com a raiz da chave mínima, e cut(p) é uma marca que verdadeiro, se p já perdeu um filho.

```
1  insert(h, c) :=
2    meld(makeheap(c))
3
4  getmin(h) :=
5    return minroot(h)
6
7  delete(h,p) :=
8    decreasekey(h,p,−∞)
9    deletemin(h)
10
11 meld(h1,h2) :=
12   h := lista com raízes de h1 e h2 (em O(1))
13   minroot(h) :=
14     if key(minroot(h1))<key(minroot(h2)) h1 else h2
15
16 decreasekey(h,p,c) :=
17   key(p):= c
18   if c < key(minRoot(h))
19     minRoot(h) := p
20   if not root(p)
21     if key(parent(p))>key(p)
22       corta p e adiciona na lista de raízes de h
23       cut(p) := false
24       cascading-cut(h,parent(p))
25
26 cascading-cut(h,p) :=
27   { p perdeu um filho }
28   if root(p)
29     return
30   if (not cut(p)) then
31     cut(p) := true
32   else
33     corta p e adiciona na lista de raízes de h
34     cut(p) := false
35     cascading-cut(h,parent(p))
36   end if
37
38 deletemin(h) :=
39   remover minroot(h)
40   juntar as listas do resto de h e dos filhos de minroot(h)
41   { reorganizar heap }
```

```
42    determina o posto máximo M = M(n) de h
43    r_i := undefined para 0 ≤ i ≤ M
44    for toda raíz r do
45      remove r da lista de raízes
46      d := degree(r)
47      while (r_d not undefined) do
48        r := link(r, r_d)
49        r_d := undefined
50        d := d + 1
51      end while
52      r_d := r
53    end for
54    definir a lista de raízes pelas entradas definidas r_i
55    determinar o novo minroot
56
57  link(h_1, h_2) :=
58    if (key(h_1)<key(h_2))
59      h := makechild(h_1, h_2)
60    else
61      h := makechild(h_2, h_1)
62    cut(h_1) := false
63    cut(h_2) := false
64    return h
```

Para concluir que a implementação tem a complexidade desejada temos que provar que as árvores com no máximo um filho cortado não ficam esparsos demais e analisar o custo amortizado das operações.

Custo amortizado Para análise usaremos um potencial de $c_1 t + c_2 m$ sendo t o número de árvores, m o número de vértices marcados e c_1, c_2 constantes. As operações makeheap, insert, getmin e meld (preguiçoso) possuem complexidade (real) $O(1)$. Para decreasekey temos que considerar o caso em que o corte em cascata remove mais que uma subárvore. Supondo que cortamos n árvores, o número de raízes é $t + n$ após dos cortes. Para todo corte em cascata, a árvore cortada é desmarcada, logo temos no máximo $m - (n - 1)$ marcas depois. Portanto custo amortizado é

$$O(n) - (c_1 t + c_2 m) + (c_1(t + n) + c_2(m - (n - 1))) = c_0 n - (c_2 - c_1)n + c_2$$

e com $c_2 - c_1 \geq c_0$ temos custo amortizado constante $c_2 = O(1)$.
Com posto máximo M, a operação deletemin tem o custo real $O(M + t)$, com as seguintes contribuições

- Linha 43: $O(M)$.
- Linhas 44–51: $O(M + t)$ com t o número inicial de árvores no heap. A lista de raízes contém no máximo as t árvores de h e mais M filhos da raiz removida. O laço total não pode executar mais que $M+t$ operações link, porque cada um reduz o número de raízes por um.
- Linhas 54–55: $O(M)$.

Seja m o número de marcas antes do deletemin e m' o número depois. Como deletemin marca nenhum vértice, temos $m' \leq m$. O número de árvores t' depois de deletemin satisfaz $t' \leq M$ porque deletemin garante que existe no máximo uma árvore de cada posto. Portanto, o potencial depois de deletemin e $\varphi' = c_1 t + c_2 m' \leq c_1 M + c_2 m$, e o custo amortizado é

$$\begin{aligned} O(M + t) - (c_1 t + c_2 m) + \varphi' &\leq O(M + t) - (c_1 t + c_2 m) + (c_1 M + c_2 m) \\ &= (c_0 + c_1)M + (c_0 - c_1)t \end{aligned}$$

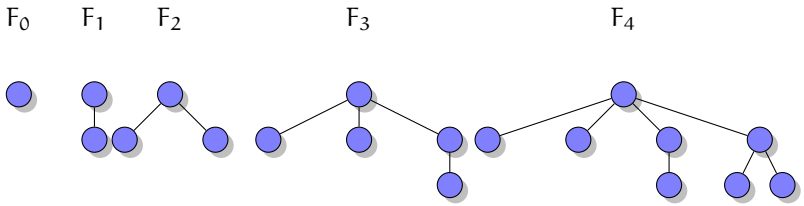
e com $c_1 \geq c_0$ temos custo amortizado $O(M)$.

Um limite para M Para provar que deletemin tem custo amortizado $\log n$, temos que provar que $M = M(n) = O(\log n)$. Esse fato segue da maneira "cautelosa" com que cortamos vértices das árvores.

Lema 1.4
Seja p um vértice arbitrário de um heap Fibonacci. Considerando os filhos na ordem temporal em que eles foram introduzidos, filho i possui pelo menos $i - 2$ filhos.

Prova. No instante em que o filho i foi introduzido, p estava com pelo menos $i - 1$ filhos. Portanto i estava com pelo menos $i - 1$ filhos também. Depois filho i perdeu no máximo um filho, e portanto possui pelo menos $i - 2$ filhos. ■

Quais as menores árvores, que satisfazem esse critério?



Lema 1.5
Cada subárvore com uma raiz p com k filhos possui pelo menos F_{k+2} vértices.

Prova. Seja S_k o número mínimo de vértices para uma subárvore cuja raiz possui k filhos. Sabemos que $S_0 = 1$, $S_1 = 2$. Define $S_{-2} = S_{-1} = 1$. Com isso obtemos para $k \geq 1$

$$S_k = \sum_{0 \leq i \leq k} S_{k-2} = S_{k-2} + S_{k-3} + \cdots + S_{-2} = S_{k-2} + S_{k-1}.$$

Comparando S_k com os números Fibonacci

$$F_k = \begin{cases} k & \text{se } 0 \leq k \leq 1 \\ F_{k-2} + F_{k-1} & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$$

e observando que $S_0 = F_2$ e $S_1 = F_3$ obtemos $S_k = F_{k+2}$. Usando que $F_n \in \Theta(\Phi^n)$ com $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ (exercício!) conclui a prova. ■

Corolário 1.1
O posto máximo de um heap Fibonacci com n elementos é $O(\log n)$.

Sobre a implementação A implementação da árvore é a mesma que no caso de heaps binomiais. Uma vantagem do heap Fibonacci é que podemos usar os nós como ponteiros – lembre que a operação decreasekey precisa isso, porque os heaps não possuem uma operação de busca eficiente. Isso é possível, porque sem heapify-up e heapify-down, os ponteiros mantem-se válidos.

1.3.4. Rank-pairing heaps

Haeupler, Sen e Tarjan (2009) propõem um rank-pairing heap (um heap "emparelhando postos") com as mesmas garantias de complexidade que um heap Fibonacci e uma implementação simplificada e mais eficiente na prática (ver observação 1.9).

Torneios Um *torneio* é uma representação alternativa de heaps. Começando com todos elementos, vamos repetidamente comparar pares de elementos, e promover o vencedor para o próximo nível (Fig. 1.1(a)). Uma desvantagem de representar torneios explicitamente é o espaço para chaves redundantes. Por exemplo, o campeão (i.e. o menor elemento) ocorre $O(\log n)$ vezes. A figura 1.1(b) mostra uma representação sem chaves repetidas. Cada chave é representado somente na comparação mais alta que ele ganhou, as outras comparações ficam vazias. A figura 1.1(c) mostra uma representação compacta

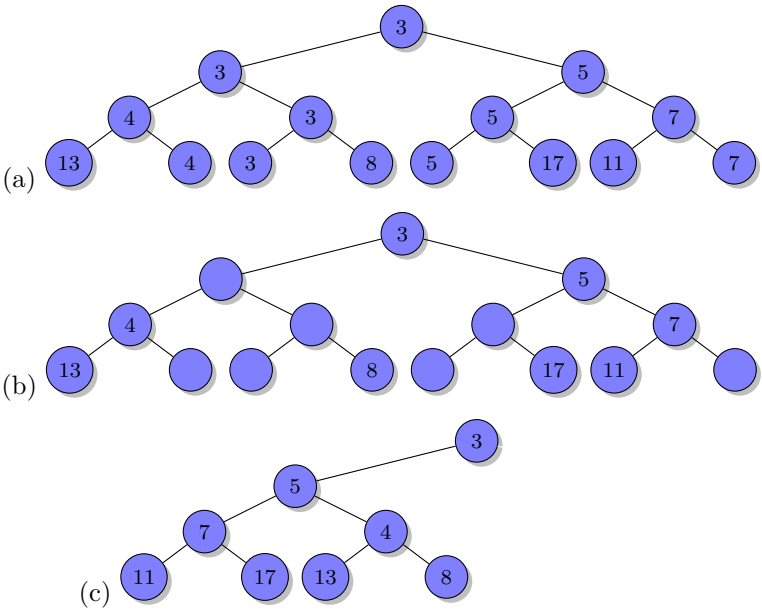


Figura 1.1.: Representações de heaps.

em forma de *semi-árvore*. Numa semi-árvore cada elemento possui um filho *ordenado* (na figura o filha da esquerda) e um filho *não-ordenado* (na figura o filho da direita). O filho ordenado é o perdedor da comparação direta com o elemento, enquanto o filho não-ordenado é o perdedor da comparação com o irmão vazio. A raiz possui somente um filho ordenado.
Cada elemento de um torneio possui um *posto*. Por definição, o posto de uma folha é 0. Uma comparação *justa* entre dois elementos do mesmo posto r resulta num elemento com posto $r+1$ no próximo nível. Numa comparação *injusta* entre dois elementos com postos diferentes, o posto do vencedor é definido pelo maior dois postos dos participantes (uma alternativa é que o posto fica o mesmo). O posto de um elemento representa um limite inferior do número de elementos que perderam contra-lo:

Lema 1.6
Um torneio com campeão de posto k possui pelo menos 2^k elementos.

Prova. Por indução. Caso um vencedor possui posto k temos duas possibilidades: (i) foi o resultado de uma comparação justa, com dois participantes

com posto $k-1$ e pela hipótese da indução com pelo menos 2^{k-1} elementos, tal que o vencedor ganhou contra pelo menos 2^k elementos. (ii) foi resultado de uma comparação injusta. Neste caso um dos participantes possuíu posto k e o vencedor novamente ganhou contra pelo menos 2^k elementos. ■

Cada comparação injusta torna o limite inferior dado pelo posto menos preciso. Por isso uma regra na construção de torneios é fazer o maior número de comparações justas possíveis. A representação de um elemento de heap é possui quatro campos para a chave (c), o posto (r), o filho ordenado (o) e o filho não-ordendo (u):

```
1  def Node(c,r,o,u)
```

Podemos implementar as operações de uma fila de prioridade (sem update ou decreasekey) como segue:

```
 1  { compara duas árvores }
 2  link(t1,t2) :=
 3    if t1.c < t2.c then
 4      return makechild(t1,t2)
 5    else
 6      return makechild(t2,t1)
 7    end if
 8
 9  makechild(s,t) :=
10    t.u := s.o
11    s.o := t
12    setrank(t)
13    s.r := s.r + 1
14    return s
15
16  setrank(t) :=
17    if t.o.r = t.u.r
18      t.r = t.o.r + 1
19    else
20      t.r = max(t.o.r,t.u.r)
21    end if
22
23  { cria um heap com um único elemento com chave c }
24  make-heap(c) := return Node(c,0,undefined,undefined)
25
26  { insere chave c no heap }
27  insert(h,c) := link(h,make-heap(c))
```

```
28
29 { união de dois heaps }
30 meld(h1,h2) := link(h1,h2)
31
32 { elemento mínimo do heap }
33 getmin(h) := return h
34
35 { deleção do elemento mínimo do heap }
36 deletemin(h) :=
37   aloca array r0...rh.o.r+1
38   t = h.o
39   while t not undefined do
40     t′ := t.u
41     t.u := undefined
42     register(t,r)
43     t := t′
44   end while
45   h′ := undefined
46   for i = 0,...,h.o.r + 1 do
47     if ri not undefined
48       h′ := link(h′,ri)
49     end if
50   end for
51   return h′
52 end
53
54 register(t,r) :=
55   if rt.o.r+1 is undefined then
56     rt.o.r+1 := t
57   else
58     t:=link(t,rt.o.r+1)
59     rt.o.r+1 := undefined
60     register(t,r)
61   end if
62 end
```

(A figura 1.2 visualiza a operação "link".)

Observação 1.7
Todas comparações de "register" são justas. As comparações injustas ocorrem na construção da árvore final nas linhas 35–39. ◊

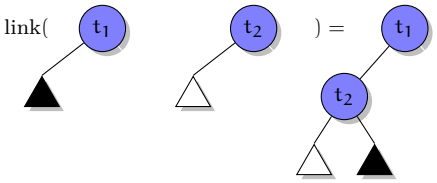


Figura 1.2.: A operação "link" para semi-árvores no caso $t_1.c < t_2.c$.

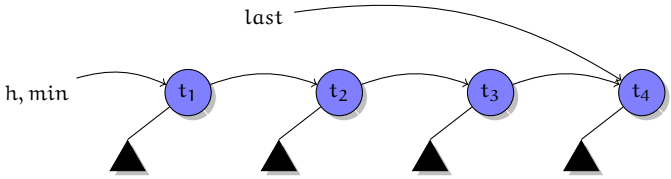


Figura 1.3.: Representação de um heap binomial.

Lema 1.7
Num torneio balanceado o custo amortizado de "make-heap", "insert", "meld" e "getmin" é $O(1)$, o custo amortizado de "deletemin" é $O(\log n)$.

Prova. Usaremos o número de comparações injustas no torneio como potencial. "make-heap" e "getmin" não alteram o potencial, "insert" e "meld" aumentam o potencial por no máximo um. Portanto a complexidade amortizada dessas operações é $O(1)$. Para analisar "deletemin" da raiz r do torneio vamos supor que houve k comparações injustas com r. Além dessas comparações injustas, r participou em no máximo $\log n$ comparações justas pelo lema 1.6. Em soma vamos liberar no máximo $k + \log n$ árvores, que reduz o potencial por k, e com no máximo $k + \log n$ comparações podemos produzir um novo torneio. Dessas $k+\log n$ comparações no máximo $\log n$ são comparações injustas. Portanto o custo amortizado é $k + \log n - k + \log n = 2 \log n = O(\log n)$. ■

Heaps binomiais com varredura única O custo de representar o heap numa árvore única é permitir comparações injustas. Uma alternativa é permitir somente comparações justas, que implica em manter uma coleção de $O(\log n)$ árvores. A estrutura de dados resultante é similar com os heaps binomiais: manteremos uma lista (simples) de raízes das árvores, junto com um ponteiro para a árvore com a raíz de menor valor. O heap é representado pela raíz de menor valor, ver Fig. 1.3.

```
1  insert(h,c) :=
2    insere make-heap(c) na lista de raizes
3    atualize a árvore mínima
4
5  meld(h1,h2) :=
6    concatena as listas de h1 e h2
7    atualize a árvore mínima
```

Somente "deletemin" opera diferente agora:

```
1  deletemin(h) :=
2    aloca um array de listas r0...r⌈log n⌉
3    remove a árvore mínima da lista de raizes
4    distribui as restantes árvores sobre r
5
6    t := h.o
7    while t not undefined do
8      t' := t.u
9      t.u := undefined
10     insere t na lista rt.o.r+1
11     t := t'
12   end while
13
14   { executa o maior número possível }
15   { de comparações justas num único passo }
16
17   h := undefined { lista final de raizes }
18   for i = 0,...,⌈log n⌉ do
19     while |ri| ≥ 2
20       t := link(ri.head,ri.head.next)
21       insere t na lista h
22       remove ri.head,ri.head.next da lista ri
23     end if
24     if |ri| = 1 insere ri.head na lista h
25   end for
26   return h
```

Observação 1.8
Continuando com comparações justas até sobrar somente uma árvore de cada posto, obteremos um heap binomial. ◊

Lema 1.8
Num heap binomial com varredura única o custo amortizado de "make-heap", "insert", "meld", "getmin" é $O(1)$, o custo amortizado de "deletemin" é $O(\log n)$.

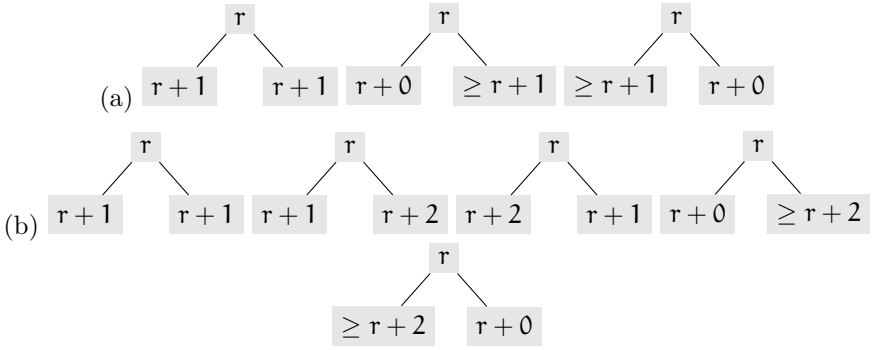


Figura 1.4.: Diferenças no posto de rp-heaps do tipo 1 (a) e tipo 2 (b).

Prova. Usaremos o dobro do número de árvores como potencial. "getmin" não altera o potencial. "make-heap", "insert" e "meld" aumentam o potencial por no máximo dois (uma árvore), e portanto possuem custo amortizado $O(1)$. "deletemin" libera no máximo $\log n$ árvores, porque todas comparações foram justas. Com um número total de h árvores, o custo de deletemin é $O(h)$. Sem perda de generalidade vamos supor que o custo é h. A varredura final executa pelo menos $(h-\log n)/2-1$ comparações justas, reduzindo o potencial por pelo menos $h - \log n - 2$. Portanto o custo amortizado de "deletemin" é $h - (h - \log n - 2) = \log n + 2 = O(\log n)$. ■

rp-heaps O objetivo do rp-heap é adicionar ao heap binomial de varredura única uma operação "decreasekey" com custo amortizado $O(1)$. A ideía e os problemas são os mesmos do heap Fibonacci: (i) para tornar a operação eficiente, vamos cortar a sub-árvore do elemento cuja chave foi diminuída. (ii) o heap Fibonacci usava cortes em cascata para manter um número suficiente de elementos na árvore; no rp-heap ajustaremos os postos do heap que perde uma sub-árvore. Para poder cortar sub-árvores temos que permitir uma folga nos postos. Num heap binomial a diferença do posto de um elemento com o posto do seu pai (caso existe) sempre é um. Num rp-heap do tipo 1, exigimos somente que os dois filhos de um elemento possuem diferença do posto 1 e 1, ou 0 e ao menos 1. Num rp-heap do tipo 2, exigimos que os dois filhos de um elemento possuem diferença do posto 1 e 1, 1 e 2 ou 0 e pelo menos 2. (Figura 1.4.)
Com isso podemos implementar o "decreasekey" (para rp-heaps do tipo 2) como segue:

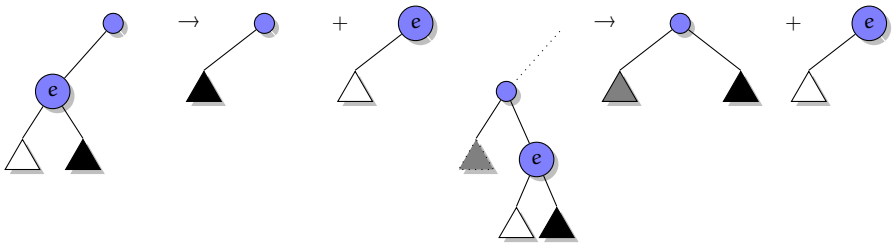


Figura 1.5.: A operação “decreasekey”.

```
1  decreasekey(h,e,Δ) :=
2    e.c := e.c − Δ
3    if root(e)
4      return
5    if parent(e).o = e then
6      parent(e).o := e.u
7    else
8      parent(e).u := e.u
9    end if
10   parent(e).u := parent(e)
11   e.u := undefined
12   u := parent(e)
13   parent(e) := undefined
14   insere e na lista de raízes de h
15   decreaserank(u)
16
17 rank(e) :=
18   if e is undefined
19     return −1
20   else
21     return e.r
22
23 decreaserank(u) :=
24   if root(u)
25     return
26   if rank(u.o) > rank(u.u)+1 then
27     k := rank(u.o)
28   else if rank(u.u) > rank(u.o)+1 then
29     k := rank(u.u)
30   else
```

```
31      k = max(rank(u.o),rank(u.u))+1
32    end if
33    if u.r = k then
34      return
35    else
36      u.r := k
37      decreaserank(parent(u))
38
39  delete(h,e) :=
40    decreasekey(h,e,−∞)
41    deletemin(h)
```

Observação 1.9
Para implementar o rp-heap precisamos além dos ponteiros para o filho ordenado e não-ordenado um ponteiro para o pai do elemento. A (suposta) eficiência do rp-heap vem do fato que o decreasekey altera os postos do heap, e pouco da estrutura dele e do fato que ele usa somente três ponteiros por elemento, e não quatro como o heap Fibonacci. ◊

Lema 1.9
Uma semi-árvore do tipo 2 com posto k contém pelo menos ϕ^k elementos, sendo $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ a razão áurea.

Prova. Por indução. Para folhas o lema é válido. Caso a raiz com posto k não é folha podemos obter duas semi-árvores: a primeira é o filho da raiz sem o seu filho não-ordenado, e a segunda é a raiz com o filho não ordenado do seu filho ordenado (ver Fig. 1.6). Pelas regras dos postos de árvores de tipo dois, essas duas árvores possuem postos $k-1$ e $k-1$, ou $k-1$ e $k-2$ ou k e no máximo $k-2$. Portanto, o menor número de elementos n_k contido numa semi-árvore de posto k satisfaz a recorrência

$$n_k = n_{k-1} + n_{k_2}$$

que é a recorrência dos números Fibonacci. ■

Lema 1.10
As operações "decreasekey" e "delete" possuem custo amortizado $O(1)$ e $O(\log n)$

Prova. Ver (Haeupler, Sen e Tarjan, 2009). ■

1.3.5. Heaps ocos

Introdução

Objetivo: operações com a mesma complexidade amortizada que heaps de Fibonacci. Para um heap h, chave k e elemento e temos as operações:

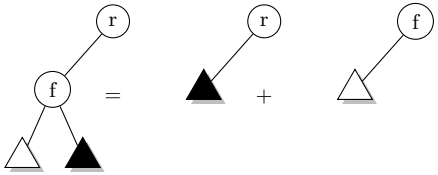


Figura 1.6.: Separar uma semi-árvore de posto k em duas.

- make-heap(): $O(1)$
- find-min(h)/getmin(h): $O(1)$
- meld(h_1,h_2): $O(1)$
- insert(e,k,h): $O(1)$
- decrease-key(e,k,h): $O(1)$
- delete(e,h): $O(\log n)$
- delete-min(h): $O(\log n)$

Ideia principal: a operação delete esvazia nós, produzindo nós ocos (ingl. hollow nodes), a operação decrease-key é um delete, seguido por um insert. Teremos duas medidas:

n Número de elementos no heap

N Número de nós no heap = # de elementos + # de nós ocos = # operações insert + # operações decrease-key

Variantes de heaps ocos:

- Heaps ansiosos (ingl. "eager heaps") com múltiplas raízes.
- Heaps ansiosos com uma única raíz.
- Heaps preguiçosos.

```
1 def Node =
2   item // elemento
3   key  // chave
4   fc   // ponteiro para primeiro filho
5   ns   // ponteiro para próximo irmão
```

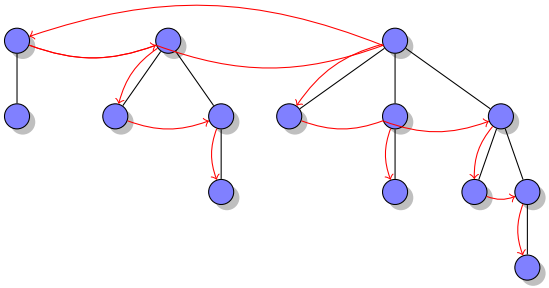
```
6    rank // posto do nó
7
8  def Item =
9    no   // nó correspondente
10   // mais dados satelites
```

Operação básica: link Um *link* gera um vencedor e um perdedor, que se torna filho do vencedor, e aumenta o posto do vencedor.

```
1    (ranked)link(t1,t2) :=
2      if t1.key ≤ t2.key
3        return makechild(t1,t2)
4      else
5        return makechild(t2,t1)
6
7    makechild(w,l) :=
8      l.ns   := w.fc
9      w.fc   := l
10     w.rank := w.rank+1
11     return w
```

Representação básica

- Lista simples circular de árvores com ordenação do heap, representada por um ponteiro à árvore cuja raíz contém a menor chave (chamada a *raíz mínima*).
- Cada *nó cheia* armazena um item. Podem existir *nós ocos* sem item.
- Nós ocos nunca mais ficam cheias, eles podem somente ser destruídos.
- Filhos ficam armazenados em listas simples, em ordem não-crescente de postos.



```
1   make-heap() := return null
2
3   make-heap(e,k) := return Node(e,k,null,self,0)
4
5   getmin(h) := h
6
7   findmin(h) := return h is not null? h.item : null
8
9   meld(h1,h2) :=
10    if h1 is null return h2
11    if h2 is null return h1
12    swap(h1.ns,h2.ns) // cria uma lista circular simples
13    if h1.key ≤ h2.key return h1 else return h2
14
15  insert(e,k,h) := meld(make-heap(e,k),h)
16
17  decrease-key(e,k,h) :=
18    u = e.node
19    v = make-heap(e,k)
20    v.rank = max{0,u.rank-2}
21    // desloca os filhos de postos 0,...,rank-2 para v
22    if u.rank ≥ 2
23      v.fc := u.fc.ns.ns
24      u.fc.ns.ns := null
25    return meld(v,h)
26
27  delete(e,h) :=
28    e.node.item := null
29    if e.node = h
30      delete-min(h)
```

```
31
32    delete-min(h) :=
33      if h is null: return
34      h.node.item := null
35
36      aloca um array R0,R1,...,RM
37      // repetidamente remove raízes ocos e une os heaps
38      r:=h
39      repeat
40        rn := r.ns
41        link-heap(r,R)
42        r:=rn
43      until r==h
44
45      // reconstrói o heap
46      h:=null
47      for i=0,...,M
48        if Ri is not null
49          Ri.ns := Ri
50          h := meld(h,Ri)
51      return h
52
53    link-heap(h,R) :=
54      if h is hollow
55        r:=h.fc
56        while r is not null
57          rn := r.ns
58          link-heap(r,R)
59          r := rn
60        destroy node h
61      else
62        i := h.rank
63        while Ri is not null
64          h := link(h,Ri)
65          Ri := null
66          i := i + 1
67        end
68        Ri := h
```

Invariantes

1. Ordenação do heap.

2. Invariante do posto: cada nó de posto r possui r filhos com postos $0, \ldots, r-1$, exceto no caso $r \geq 2$ e o nó foi esvaziada por uma operação decrease-key. Neste caso o nó possui dois filhos de postos $r-1$ e $r-2$.

Corretude

Teorema 1.2
Heaps com nós ocos implementam corretamente todas operação e mantém as invariantes.

Prova. Por indução sobre o número de operações. ■
Lembrança: os números de Fibonacci são definidos por $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{i+2} = F_i + F_{i+1}$, para $i \geq 0$ e temos $F_{i+2} \geq \Phi^i$, com a razão áurea $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

Teorema 1.3
Um nó de posto r possui pelo menos $F_{r+3} - 1$ descendentes (cheios ou ocos), incluindo o próprio nó, na árvore.

Prova. Por indução sobre r. Para $r = 0$, temos $F_3 - 1 = 1$, e para $r = 1$ temos $F_4 - 1 = 2$ e a afirmação está correta, porque para $r < 2$ um nó não perde filhos caso for esvaziado. Para $r \geq 2$ pela invariante do posto temos pelo menos dois filhos com postos $r-1$ e r_2. Pela hipótese da indução eles tem pelo menos $F_{r+1} - 1$ e $F_{r+2} - 1$ descendentes e logo r possui pelo menos $F_{r+1} - 1 + F_{r+2} - 1 + 1 = F_{r+3} - 1$ descendentes. ■

Corolário 1.2
Depois uma operação delete-min o número de árvores é no máximo $\lceil \log_\Phi N \rceil = O(\log N)$ porque temos no máximo uma árvore por posto. Logo podemos escolher $M = \lceil \log_\Phi N \rceil$ na operação delete-min.

Teorema 1.4
O tempo amortizado por operação num heap oco é $O(1)$, exceto para as operações delete e delete-min, que tem complexidade $O(\log N)$ para um heap com N nós.

Prova. Todas operações exceto a deleção do elemento mínimo possuem tempo $O(1)$ no caso pessimista. O custo de uma deleção é $O(H+T)$ com H o número de nós ocos destruídos, e T o número de árvores antes das operações link. Depois das operações link temos no máximo $\log_\Phi N$ árvores, logo faremos pelo

Tabela 1.2.: Complexidade das operações de uma fila de prioridade. Complexidades em negrito são amortizados. (1): meld preguiçoso.

	insert	getmin	deletemin	update	decreasekey	delete
Vetor	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	(update)	$O(1)$
Lista ordenada	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	(update)	$O(1)$
Heap binário	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	(update)	$O(\log n)$
Heap binomial	$\mathbf{O(1)}$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	(update)	$O(\log n)$
Heap binomial(1)	$O(1)$	$O(1)$	$\mathbf{O(\log n)}$	$O(\log n)$	(update)	$O(\log n)$
Heap Fibonacci	$O(1)$	$O(1)$	$O(\log n)$	-	$\mathbf{O(1)}$	$O(\log n)$
rp-heap	$O(1)$	$O(1)$	$\mathbf{O(\log n)}$	-	$\mathbf{O(1)}$	$\mathbf{O(\log n)}$

menos $T - \log_\Phi N$ operações link e no máximo $\log_\Phi N$ operações meld. Logo o custo total é $O(1)$ por destruição de um nó oco, e por link, mas $O(\log N)$.

Para contabilizar a destruição do um nó, aumentamos o custo de cada criação (insert, decrease-key) por 1.

Para contabilizar as operações link: define um potencial igual ao número de nós cheias, que não são filho de outro nó cheia (i.e. raízes e filhos de nós ocos). Para todas operações diferente de delete-min e delete, o aumento do potencial é constante (no máximo 1 para insert, 3 para decrease-key, 0 para as demais). Para o delete que remove o elemento mínimo e delete-min, o custo amortizado de cada link é 0, porque um link combina duas raízes cheias, reduzindo o potencial por 1. Além disso, ao remover um elemento, o potencial aumenta por no máximo $\log_\Phi N$, um por cada filho do novo nó oco. Logo o custo amortizado de delete e delete-min é $O(\log N)$.

■

Re-otimizando o heap A análise acima é em função de N. Caso $\log N = O(\log n)$ temos um heap assintoticamente ótimo. Caso executamos muitas operações decrease-key, temos que reconstruir o heap periodicamente, para garantir $N = O(n)$. O método mais simples é: escolhe uma constante $c > 1$ e para $N > cn$ reconstrói o heap completamente, destruindo os nós ocos, criando heaps de um único nó de todos nós cheios, e aplicando operações meld para unir todos heaps. O custo é $O(N)$ para percorrer todo nó uma vez e pode ser atribuído na análise amortizada para as operações insert e delete-min.

Resumo: Filas de prioridade A tabela 1.2 resume a complexidade das operações para diferentes implementações de uma fila de prioridade.

1.3.6. Árvores de van Emde Boas

Pela observação 1.4 é impossível implementar uma fila de prioridade baseado em comparação de chaves com todas operações em $o(\log n)$. Porém existem algoritmos que ordenam n números em $o(n \log n)$, aproveitando o fato que as chaves são números com k bits, como por exemplo o radix sort que ordena em tempo $O(kn)$, ou aproveitando que as chaves possuem um domínio limitado, como por exemplo o counting sort que ordena n números em $[k]$ em tempo $O(n + k)$.
Uma *árvore de van Emde Boas* (árvore vEB) T realiza as operações

- member(T, e): elemento e pertence a T?
- insert(T, e): insere e em T
- delete(T, e): remove e de T
- min(T) e max(T): elemento mínimo e máximo de T, ou "undefined" caso não existe
- succ(T, e) e pred(T, e): successor e predecessor de e em T; e não precisa pertencer a T

no universo de chaves $[0, u - 1]$ em tempo $O(\log \log u)$ e espaço $O(u)$.
Outras operações compostas podem ser implementados, por exemplo

```
1  deletemin(T) :=
2     e := min(T); delete(e); return e
3  deletemax(T) :=
4     e := max(T); delete(e); return e
```

Árvores binárias em ordem vEB Na discussão da implementação de árvores binárias na página 14 discutimos uma representação em ordem da busca por profundidade (BFS order). A ideia da ordem vEB é "cortar" a altura (número de níveis) h de uma árvore binária (que possui $n = 2^h - 1$ nodos e 2^{h-1} folhas) pela metade. Com isso obtemos

- uma árvore superior T_0 de altura $\lfloor h/2 \rfloor$
- e $b = 2^{\lfloor h/2 \rfloor} = \Theta(2^{h/2}) = \Theta(\sqrt{n})$ árvores inferiores $T_1, \ldots, T_b$ de altura $\lceil h/2 \rceil$ e com $2^{\lceil h/2 \rceil} - 1 = \Theta(\sqrt{n})$ nodos.

Os nodos dessa árvore são armazenados em ordem $T_0, T_1, \ldots, T_b$ e toda árvore T_i é ordenado recursivamente da mesma maneira, até chegar numa árvore de altura $h = 1$, como a Figura 1.7 mostra.

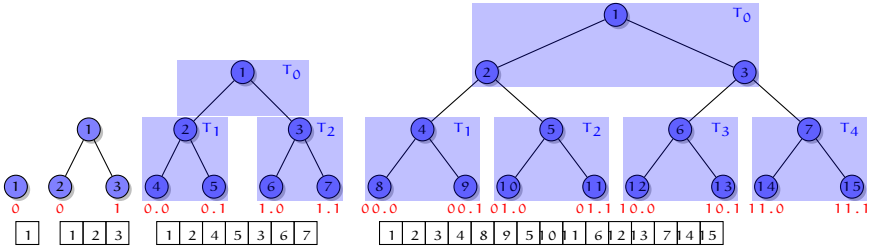


Figura 1.7.: Organização de árvores binárias em ordem de van Emde Boas para $h \in [4]$. As folhas são rotuladas por "cluster.subíndice". Abaixo da árvore a ordem do armazenamento do vértices é dado. Os T_i correspondem com as subárvores do primeiro nível de recursão.

Armazenar uma árvore binária em ordem de vEB não altera a complexidade das operações. Uma busca, por exemplo, continua com complexidade $O(h)$. Porém, armazenado em ordem da busca por profundidade, uma busca pode gerar $\Theta(h)$ falhas no *cache*, no pior caso. Na ordem de vEB, a busca sempre atravessa $\Omega(\log_2 B)$ níveis, com B o tamanho de uma linha de cache, antes de gerar uma nova falha no *cache*. Logo uma busca gera somente $O(\log_2 n / \log_2 B) = O(\log_B n)$ falhas no *cache*. O layout se chama *cache oblivious* porque funciona sem conhecer o tamanho de uma linha de cache B.

Árvores vEB A estrutura básica de uma árvore de vEB é

1. Usar uma árvore binária de altura h representar 2^{h-1} elementos nas folhas.
2. Cada folha armazena um bit, que é 1 caso o elemento correspondente pertence ao conjunto representado.
3. Os bits internos servem como *resumo* da sub-árvore: eles representam a conjunção dos bits dos filhos, i.e. um bit interno é um, caso na sua sub-árvore existe pelo menos uma folha que pertence ao conjunto representado.

Todas as operações da estrutura acima podem ser implementadas em tempo $O(h) = O(\log u)$. Para melhorar isso, vamos aplicar a mesma ideia da ordem de van Emde Boas: a árvore é separada em uma árvore superior, e uma série de árvores inferiores, cada uma com altura $\approx h/2$. As folhas da árvore superior contém o resumo das raízes das árvores inferiores: por isso a árvore superior possui altura $\lfloor h/2 \rfloor + 1$, uma a mais comparado com a ordem de vEB.

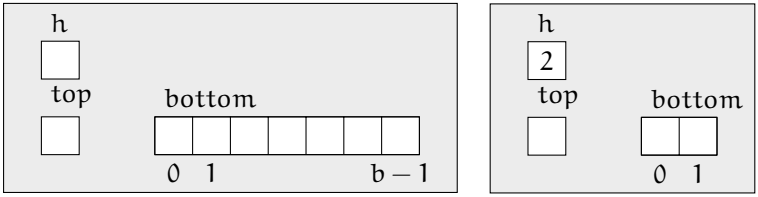


Figura 1.8.: Representação da primeira versão de uma árvore vEB. (a) Forma geral. (b) Caso base.

Fig. 1.8 mostra essa representação. A altura da árvore está armazenada no campo h. Além disso temos um ponteiro "top" para a árvore superior, e um vetor de ponteiros "bottom" de tamanho $b = 2^{\lfloor h/2 \rfloor}$ para as raízes das árvores inferiores. No caso base com $h = 2$, abusaremos os campos "top" e "bottom" para armazenar os bits da raiz e dos dois filhos: um ponteiro arbitrário diferente de undefined representa um bit 1, o ponteiro undefined o bit 0. Para isso servem as funções auxiliares

```
1   set(p)  := p := 1
2   clear(p)  := p := undefined
3   bit(p)   := return p ≠ undefined
```

Observe que as folhas $0, 1, \ldots, 2^{h-1}-1$ podem ser representadas com $h-1$ bits. Os primeiros $\lfloor h/2 \rfloor$ bits representam o número da sub-árvore que contém a folha, e os últimos $\lceil h/2 \rceil - 1$ bits o índice (relativo) da folha na sua sub-árvore. Isso explica a definição das funções auxiliares

```
1   subtree(e)  := e ≫ ⌈h/2⌉ − 1
2   subindex(e)  := e&(1 ≪ ⌈h/2⌉ − 1) − 1
3   element(s,i)  := (s ≪ ⌈h/2⌉ − 1) | i
```

para extrair de um elemento o número da sub-árvore correspondente, ou o seu índice nesta sub-árvore, e para determinar o índice na árvore atual do i-ésimo elemento da sub-árvore s.
Com isso podemos implementar as operações como segue.

```
1  member(T,e) :=
2    if T.h = 2
3      return bit(T.bottom[e])
4    return member(T.bottom[subtree(e)],subindex(e))
5
6  min(T,e) :=
```

```
 7    if T.h = 2
 8      if bit(T.bottom[0])
 9        return 0
10      if bit(T.bottom[1])
11        return 1
12      return undefined
13
14    c := min(T.top)
15    if c = undefined
16      return c
17    return element(c,min(T.bottom[c]))
18
19  succ(T,e) :=
20    if T.h = 2
21      if e = 0 and bit(T.bottom[1])=1
22        return 1
23      return 0
24
25    s := succ(T.bottom[subtree(e)],subindex(e))
26    if s ≠ undefined
27      return element(subtree(e),s)
28
29    c := succ(T.top,subtree(e))
30    if c = undefined
31      return c
32    return element(c,min(T.bottom[c]))
33
34  insert(T,e) :=
35    if T.h = 2
36      set(T.bottom[e])
37      set(T.top)
38    else
39      insert(T.bottom[subtree(e)],subindex(e))
40      insert(T.top,subtree(e))
41
42  delete(T,e) :=
43    if T.h = 2
44      clear(T.bottom[e])
45      if (bit(T.bottom[1 − e])=0
46        clear(T.top)
```

```
47    else
48       delete(T.bottom[subtree(e)],subindex(e))
49       s:=min(T.bottom[subtree(e)])
50       if s = undefined
51          delete(T.top,subtree(e))
```

As complexidades das operações implementadas no caso pessimista são (ver as chamadas recursivas acima em vermelho):

member $T(h) = T(\lceil h/2 \rceil) + O(1) = \Theta(\log h) = \Theta(\log \log u)$.

min $T(h) = T(\lfloor h/2 \rfloor + 1) + T(\lceil h/2 \rceil) + O(1) = 2T(h/2) + O(1) = \Theta(h) = \Theta(\log u)$.

insert $T(h) = T(\lceil h/2 \rceil + T(\lfloor h/2 \rfloor + 1) + O(1) = \Theta(h) = \Theta(\log u)$.

succ/delete $T(h) = T(\lceil h/2 \rceil) + T(\lfloor h/2 \rfloor + 1) + O(h) = 2T(h/2) + O(h) = \Theta(h \log h) = \Theta(\log u \log \log u)$ (com um trabalho extra de $O(h)$ para chamar "min").

Logo todas operações com mais que uma chamada recursiva não possuem a complexidade desejada $O(\log \log u)$. A introdução de dois campos "min" e "max" que armazenam o elemento mínimo e máximo, junto com algumas modificações resolvem este problema.

1. Armazenar somente o mínimo, a operação "min" custa somente $O(1)$ é "insert", "succ" e "delete" consequentemente somente $O(h)$.

2. Armazenado também o máximo, sabemos na operação "succ" se o sucessor está na árvore atual sem buscar, logo a operação "succ" pode ser implementada em $O(\log \log u)$.

3. A última modificação é *não armazenar* o elemento mínimo na sub-árvore correspondente. Com isso a primeira inserção somente modifica a árvore de resumo (top) e a segunda e as demais operações modificam somente a sub-árvore correspondente. A deleção funciona similarmente: ela remove ou um elemento na sub-árvore, ou o último elemento, modificando somente a árvore de resumo (top). Com isso todas operações podem ser implementadas em $O(\log \log u)$.

Na base armazenaremos os elementos somente nos campos "min" e "max". Por convenção setamos "min" maior que "max" numa árvore vazia. As seguintes funções auxiliares permitem remover os elementos de uma árvore base e determinar se uma árvore possui nenhum, um ou mais elementos.

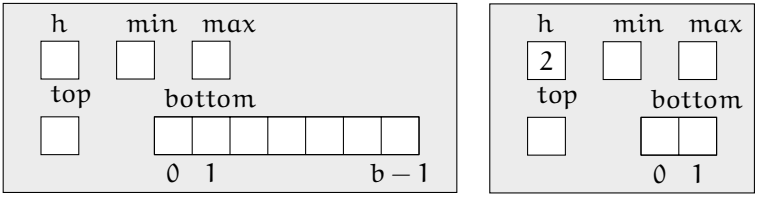


Figura 1.9.: Representação uma árvore vEB. (a) Forma geral. (b) Caso base.

```
1  clear(T) :=
2    T.min:=1; T.max:=0; // convenção
3
4  empty(T) :=
5    return T.min>T.max
6
7  singleton(T) :=
8    return T.min=T.max
9
10 full(T) :=
11   return T.min<T.max
```

```
1  member(T,e) :=
2    if empty(T)
3      return false
4    if T.min = e or T.max = e
5      return true
6
7    { não é ``min'' nem ``max''? a base não contém o elemento }
8    if T.h = 2
9      return false
10
11   return member(T.bottom[subtree(e)],subindex(e))
12
13 min(T) :=
14   if empty(T)
15     return undefined
16   return T.min
17
18 max(T) :=
```

```
19    if empty(T)
20      return undefined
21    return T.max
22
23  succ(T,e) :=
24    if T.h=2
25      if e = 0 and T.max = 1
26        return 1
27      return undefined
28
29    if not empty(T) and e < T.min
30      return T.min
31
32    { sucessor na árvore atual }
33    m:=max(T.bottom[subtree(e)])
34    if m ≠ undefined and subindex(e)<m
35      return element(subtree(e),
36                     succ(T.bottom[subtree(e)],subindex(e)))
37
38    { mínimo na árvore sucessora }
39    c:= succ(T.top,subtree(e))
40    if c = undefined
41      return c
42    return element(c,min(T.bottom[c]))
43
44  pred(T,e) :=
45    if T.h=2
46      if e = 1 and T.min=0
47        return 0
48      return undefined
49
50    if not empty(T) and T.max < e
51      return T.max
52
53    { predecessor na árvore atual }
54    m:=min(T.bottom[subtree(e)])
55    if m ≠ undefined and m <subindex(e)
56      return element(subtree(e),
57                     pred(T.bottom[subtree(e)],subindex(e)))
58
```

```
59    { máximo na árvore predecessora }
60    c := pred (T.top, subtree(e))
61    if c = undefined
62      if not empty(T) and T.min<e
63        return T.min
64      else
65        return undefined
66
67    return element(c, max(T.bottom[c]))
68
69  insert(T, e) :=
70    if empty(T)
71      T.min := T.max := e
72      return
73
74    { novo mínimo: setar min, insere min anterior }
75    if e < T.min
76      swap(T.min, e)
77
78    { insere recursivamente }
79    if T.h > 2
80      if empty(T.bottom[subtree(e)])
81        insert (T.top, subtree(e))
82      insert (T.bottom[subtree(e)], subindex(e))
83
84    { novo máximo: atualiza }
85    if T.max < e
86      T.max := e
87
88  delete(T, e) :=
89    if empty(T)
90      return
91
92    if singleton(T)
93      if T.min = e
94        clear(T)
95      return
96
97    { novo mínimo? }
98    if e = T.min
```

```
99      T.min := element(min(T.top),min(T.bottom[min(T.top)]))
100     e := T.min
101
102   { remove e da árvore }
103   delete (T.bottom[subtree(e)],subindex(e))
104
105   if empty(T.bottom[subtree(e)])
106     delete (T.top,subtree(e))
107     if e = T.max
108       c:=max(T.top)
109       if c = undefined
110         T.max := T.min
111       else
112         T.max := element(c,max(T.bottom[c]))
113   else
114     T.max := element(subtree(e),max(T.bottom[subtree(e)]))
```

Com essas implementações cada função executa uma chamada recursiva e um trabalho constante a mais e logo precisa tempo $O(\log h)$. Em particular, na função "insert" caso a sub-árvore do elemento é vazia na linha 80 a segunda chamada "insert" na linha 82 precisa tempo constante. Similarmente, ou a deleção recursiva na linha 103 não remove o último elemento, e talvez custa $O(\log h)$, e logo a deleção da linha 106 não é executada, ou ela remove o último elemento e custo somente $O(1)$.

1.3.7. Tópicos

Fast marching method

A equação Eikonal (grego eikon, imagem)

$$\begin{aligned} \|\nabla T(x)\| F(x) &= 1, & x &\in \Omega, \\ T|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

define o tempo de chegada de uma superfície que inicia no tempo 0 na fronteira $\partial\Omega$ de um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e se propaga com velocidade $F(x) > 0$ na direção normal[4]. O fast marching method resolve a equação Eikonal por discretizar o espaço regularmente, aproximar as derivadas do gradiente $\|\nabla T\|$ por diferenças finitas e propagar os valores com um método igual ao algoritmo de Dijkstra.

[4] O método também funciona para $F(x) < 0$, mas não para $F(x)$ com sinais diferentes.

Com

$$\nabla T = (\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z)$$

temos

$$\|\nabla T\|^2 = (\partial T/\partial x)^2 + (\partial T/\partial z)^2 + (\partial T/\partial z)^2 = 1/F^2.$$

Definindo as diferenças finitas

$$D^{+x}T = T(x_1 + 1, x_2, x_3) - T(x); \qquad D^{-x}T = T(x) - T(x_1 - 1, x_2, x_3)$$

podemos aproximar

$$\partial T/\partial x \approx T_x = \max\{D^{-x}T, -D^{+x}T, 0\}$$

e com aproximações similares para as direções y e z obtemos uma equação quadrática em $T(x)$

$$\|\nabla T\|^2 \approx T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 = 1/F^2 \tag{1.1}$$

Na solução dessa equação valores ainda desconhecidos de T são ignorados. O fast marching method define $T = 0$ para os pontos iniciais em $\partial\Omega$ e coloca-os numa fila de prioridade. Repetidamente o ponto de menor tempo é extraído da fila, os vizinhos ainda não visitados são atualizados de acordo com (1.1) e entram na fila, caso ainda não fazem parte. (Na terminologia do fast marching method, os pontos com distância já conhecida são "vivos" (*alive*), os pontos na fila formam a "faixa estreita" (*narrow band*), os restantes pontos são "distantes" (*far away*).)

Busca informada

O algoritmo de Dijkstra encontra o caminho mais curto de um vértice origem $s \in V$ para todos os outros vértices num grafo ponderado $G = (V, E, d)$. Caso estamos interessados somente no caminho mais curto para um único vértice destino $t \in T$, podemos parar o algoritmo depois de processar t. Isso é uma aplicação muito comum, por exemplo na busca da rota mais curta em sistemas de navegação. Uma *busca informada* processa vértices que estimadamente são mais próximos do destino com preferência. O objetivo é processar menos vértices antes de encontrar o destino. Um dos algoritmos mais conhecidos de busca informada é o algoritmo A*. Para cada vértice $v \in V$ com distância $g(v)$ do origem s, ele usa uma função heurística $h(v)$ que estima a distância para o destino t e processa os vértices em ordem crescente do custo total estimado

$$f(v) = g(v) + h(v). \tag{1.2}$$

O desempenho do algoritmo A^* depende da qualidade de heurística h. Ele pode, diferente do algoritmo de Dijkstra, processar vértices múltiplas vezes, depois de descobrir um caminho mais curto para um vértice já processado. Isso é a principal diferença com o algoritmo de Dijkstra. Uma outra é que substituímos o campo "visited" usando no algoritmo Dijkstra 1.4 por um conjunto V de vértices já visitados, porque o A^* é frequentemente aplicado em grafos com um número grande de vértices, que são explorados passo a passo sem armazenar todos vértices do grafo na memoria.

```
1  g(s) := 0
2  f(s) := g(s) + h(s)
3  V := ∅  { vértices já visitados }
4  Q := ∅
5  insert(Q, (s, f(s)))
6  while Q ≠ ∅ do
7    v := deletemin(Q)
8    V := V ∪ {v}
9    if v = t        { destino encontrado }
10     return
11   for u ∈ N⁺(v) do
12     if u ∈ Q then { ainda aberto: atualiza }
13       g(u) := min(g(v) + d_vu, g(u))
14       f(u) := g(u) + h(u)
15       update(Q, (u, f(u)))
16     else if u ∈ V then
17       if g(v) + d_vu < g(u) then
18         { caminho menor p/ vértice já processado }
19         V := V \ {u}
20         g(u) := g(v) + d_vu
21         f(u) := g(u) + h(u)
22         insert(Q, (u, f(u)))
23       end if
24     else                        { novo vértice }
25         g(u) := g(v) + d_vu
26         f(u) := g(u) + h(u)
27         insert(Q, (u, f(u)))
28     end if
29   end for
30 end while
```

Observação 1.10

O algoritmos de Dijkstra e A^* funcionam de forma idêntica quando substi-

tuímos o vértice destino $t \in V$ por um conjunto de vértices destino $T \subseteq V$. ◊

Existe uma formulação alternativa, equivalente do algoritmo A^*. Ao invés de sempre processar o vértice aberto de menor valor f podemos processar sempre o vértice aberto de menor distância $\hat{g}$ num grafo com pesos modificados $\hat{d}_{uv} = d_{uv} - h(u) + h(v)$. Com pesos modificados obtemos para a distância total de um caminho uv arbitrário P

$$\begin{aligned}\hat{g}(u,v) &= \sum_{(u',v')\in P} \hat{d}_{u'v'} = \sum_{(u',v')\in P} d_{u'v'} - h(u') + h(v') \\ &= h(v) - h(u) + \sum_{(u',v')\in P} d_{u'v'} = h(v) - h(u) + g(u,v).\end{aligned}$$

Com $\hat{g}(u) = \hat{g}(s,u)$ obtemos

$$\begin{aligned}f(u) \leq f(v) &\iff g(u) + h(u) \leq g(v) + h(v) \\ &\iff \hat{g}(u) + h(s) \leq \hat{g}(v) + h(s) \\ &\iff \hat{g}(u) \leq \hat{g}(v).\end{aligned}$$

Logo a ordem de processamento por menor $\hat{g}$ ou por menor valor f é equivalente.
Para garantir a otimalidade de uma solução a heurística h tem que ser *admissível*. Caso h é *consistente* o algoritmo A^* não somente retorna a solução ótima, mas processa cada vértice somente uma vez.

Definição 1.1 (Admissibilidade e consistência)
Seja $\delta(v)$ a distância mínima do vértice v ao destino t. Uma heurística h é *admissível* caso h é um limitante inferior à distância mínima, i.e.

$$h(v) \leq \delta(v). \tag{1.3}$$

Uma heurística é consistente caso o seu valor diminui de acordo com o pesos do grafo: para um arco $(u,v) \in A$

$$h(v) \geq h(u) - d_{uv}. \tag{1.4}$$

Na representação alternativa, o critério de consistência (1.4) é equivalente com $\hat{d}_{uv} = d_{uv} - h(u) + h(v) \geq 0$. Com isso temos diretamente o

Teorema 1.5
Caso h é consistente o algoritmo A^* nunca processa um vértice mais que uma vez.

Prova. Neste caso $\hat{d}_{uv} \geq 0$. Logo todas distâncias são positivas é o algoritmo A* é equivalente com o algoritmo de Dijkstra. Por um argumento similar ao da proposição (1.3) o A* nunca processa um vértice duas vezes. ■

Lema 1.11
Caso h é consistente, h é admissível.

Prova. Seja $P = v_0 v_1 \dots v_k$ um caminho de $v_0 = u$ a $v_k = t$. Então

$$d(P) = \sum_{i \in [k]} d_{v_{i-1}, v_i} \geq \sum_{i \in [k]} h(v_{i-1}) - h(v_i) = h(u) - h(t) \geq h(u).$$

Em particular, para um caminho P^* ótimo de u a t temos $h(u) \leq d(P^*) = \delta(P^*)$. ■

Teorema 1.6
Caso existe uma solução mínima e h é admissível o algoritmo A* encontra a solução mínima.

Prova. Seja $P^* = v_0 v_1 \dots v_k$ um caminho ótimo de $v_0 = s$ a $v_k = t$. Caso A* não terminou, t ainda não foi explorado. Logo existe um vértice aberto de menor índice v_i em P^*. Agora supõe que o próximo vértice explorado é t, mas o valor de t não é ótimo, i.e. $f(t) > d(P^*)$. Mas então $f(v_i) \leq d(P^*) < f(t)$, porque h é admissível, em contradição com a exploração de t. ■

Exemplo 1.5
Figure 1.10 mostra uma grafo com três funções heurísticos h diferentes. A heurística no grafo da esquerda não é admissível em u (marcado por ↑). O A* expande s, v e depois t e termina com a distância errada de 5 para chegar em t. A heurística no grafo do meio é admissível, mas não consistente: $h(u) \leq h(v)+1$ não é satisfeito. O A* expande s, v, u, v, t, i.e. o vértice v é processado duas vezes. Finalmente a heurística no grafo da direita é consistente (e por isso admissível). O A* expanda cada vértice uma vez, na ordem s, u, t (ou s, u, v, t).

◊

Exemplo 1.6
A Figura 1.11 compara uma busca com o algoritmo de Dijkstra com uma busca com o A* num grafo geométrico com 5000 vértices e uma aresta entre vértices de distância no máximo 0.02. Vértices não explorados são pretos, vértices explorados claros. A claridade corresponde com a ordem de exploração.

◊

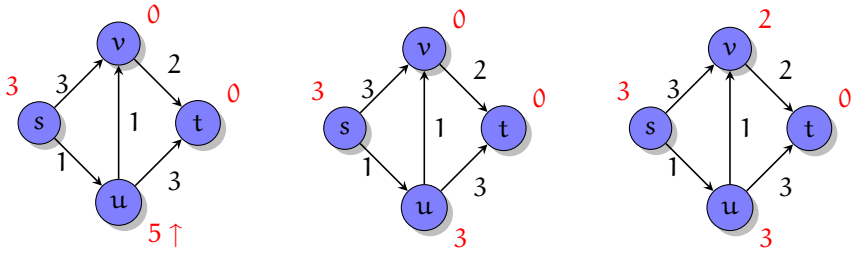


Figura 1.10.: Esquerda: Heurística não-admissível. A* produz o valor errado 5. Centro: Heurística admissível, mas inconsistente. A* visita v duas vezes. Direita: Heurística admissível e consistente. A* visita cada vértice somente uma vez.

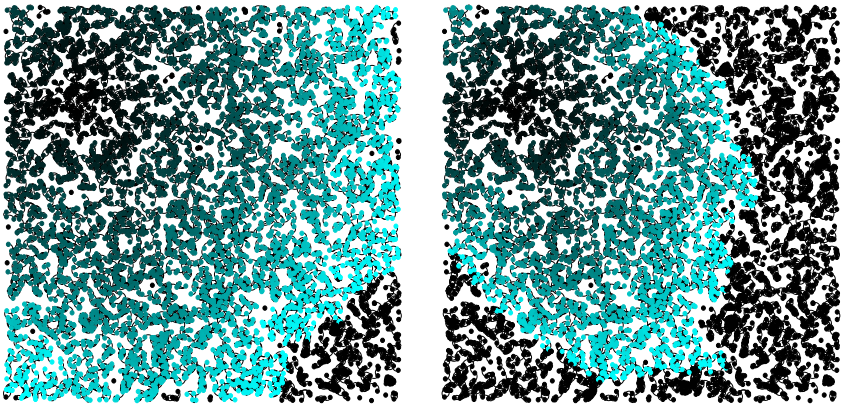


Figura 1.11.: Comparação de uma busca com o algoritmo de Dijkstra (esquerda) e o A* (direita).

1.3.8. Notas

O algoritmo (assintoticamente) mais rápido para árvores geradoras mínimas usa *soft heaps* é possui complexidade $O(m\alpha(m, n))$, com α a função inversa de Ackermann (Chazelle, 2000; Kaplan e Zwick, 2009).
Karger propôs uma variante de heaps de Fibonacci que substituem a marca "cut" usado nos cortes em cascata por uma decisão randômica: com probabilidade 0.5 continua cortando, senão para. Caso além disso o heap é construído novamente com probabilidade $1/n$ depois de cada operação, "deletemin" possui complexidade $\Theta(\log^2 n / \log \log n)$ (Li e Peebles, 2015).
Armazenar e atravessar árvores em ordem de van Emde Boas usando índices, similar ao ordem por busca em largura é possível (Brodal, Fagerberg e Jacob, 2001). O consumo de memoria das árvores de van Emde Boas pode ser reduzido para $O(n)$ (Dementiev et al., 2004; Cormen et al., 2009).
Mais sobre o fast marching method se encontra em Sethian (1999). Uma aplicação interessante é a solução do caixeiro viajante contínuo (Andrews e Sethian, 2007).

1.3.9. Exercícios

Exercício 1.1
Prove lema 1.3. Dica: Use indução sobre n.

Exercício 1.2
Prove que um heap binomial com n vértices possui $O(\log n)$ árvores. Dica: Por contradição.

Exercício 1.3 (Laboratório 1)

1. Implementa um heap binário. Escolhe casos de teste adequados e verifica o desempenho experimentalmente.

2. Implementa o algoritmo de Prim usando o heap binário. Novamente verifica o desempenho experimentalmente.

Exercício 1.4 (Laboratório 2)

1. Implementa um heap binomial.

2. Verifica o desempenho dele experimentalmente.

3. Verifica o desempenho do algoritmo de Prim com um heap Fibonacci experimentalmente.

Exercício 1.5
A proposição 1.3 continua ser correto para grafos com pesos negativos? Justifique.

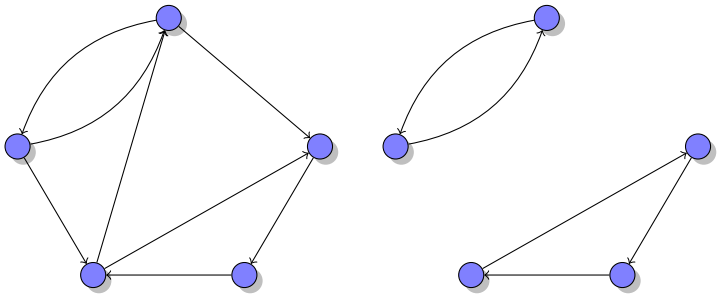


Figura 1.12.: Grafo (esquerda) com circulação (direita)

1.4. Fluxos em redes

Definição 1.2
Para um grafo direcionado $G = (V, E)$ ($E \subseteq V \times V$) escrevemos $\delta^+(v) = \{(v, u) \mid (v, u) \in E\}$ para os arcos saintes de v e $\delta^-(v) = \{(u, v) \mid (u, v) \in E\}$ para os arcos entrantes em v.

Seja $G = (V, E, c)$ um grafo direcionado e capacitado com capacidades $c : E \to \mathbb{R}$ nos arcos. Uma atribuição de fluxos aos arcos $f : E \to \mathbb{R}$ em G se chama *circulação*, se os fluxos respeitam os limites da capacidade ($f_e \leq c_e$) e satisfazem a conservação do fluxo

$$f(v) := \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0 \tag{1.5}$$

(ver Fig. 1.12).

Lema 1.12
Qualquer atribuição de fluxos f satisfaz $\sum_{v \in V} f(v) = 0$.

Prova.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} f(v) &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e \\ &= \sum_{(v,u) \in E} f_{(v,u)} - \sum_{(u,v) \in E} f_{(u,v)} = 0 \end{aligned}$$

■

A circulação vira um *fluxo*, se o grafo possui alguns vértices que são fontes ou destinos de fluxo, e portanto não satisfazem a conservação de fluxo. Um

fluxo s–t possui um único fonte s e um único destino t. Um objetivo comum (transporte, etc.) é achar um fluxo s–t máximo.

FLUXO S–T MÁXIMO

Instância Grafo direcionado $G = (V, E, c)$ com capacidades c nos arcos, um vértice origem $s \in V$ e um vértice destino $t \in V$.

Solução Um fluxo f, com $f(v) = 0$, $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$.

Objetivo Maximizar o fluxo $f(s)$.

Lema 1.13
Um fluxo s–t satisfaz $f(s) + f(t) = 0$.

Prova. Pelo lema 1.12 temos $\sum_{v \in V} f(v) = 0$. Mas $\sum_{v \in V} f(v) = f(s) + f(t)$ pela conservação de fluxo nos vértices em $V \setminus \{s, t\}$. ■

Uma formulação como programa linear é

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & f(s) && && (1.6)\\ \textbf{sujeito a} \quad & f(v) = 0, && \forall v \in V \setminus \{s, t\},\\ & 0 \leq f_e \leq c_e, && \forall e \in E. \end{aligned}$$

Observação 1.11
O programa (1.6) possui uma solução, porque $f_e = 0$ é uma solução viável. O sistema não é ilimitado, porque todas variáveis são limitadas, e por isso possui uma solução ótima. O problema de encontrar um fluxo s–t máximo pode ser resolvido em tempo polinomial via programação linear. ◊

1.4.1. O algoritmo de Ford-Fulkerson

Nosso objetivo: Achar um algoritmo *combinatorial* mais eficiente. Idéia básica: Começar com um fluxo viável $f_e = 0$ e aumentar ele gradualmente. Observação: Se temos um s–t-caminho $P = (v_0 = s, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = t)$, podemos aumentar o fluxo atual f um valor que corresponde ao "gargalo"

$$g(f, P) := \min_{\substack{e = (v_i, v_{i+1}) \\ 0 \leq i < n}} c_e - f_e.$$

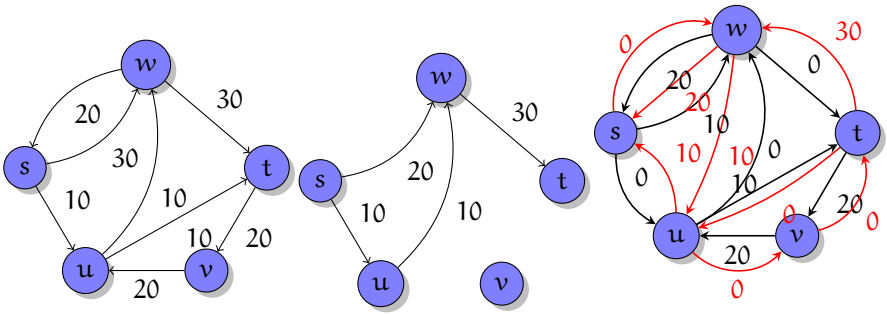


Figura 1.13.: Esquerda: Grafo com capacidades. Centro: Fluxo com valor 30. Direita: O grafo residual correspondente.

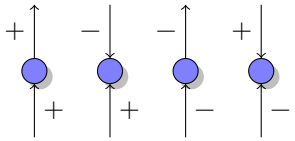


Figura 1.14.: Manter a conservação do fluxo.

Observação 1.12
Repetidamente procurar um caminho com gargalo positivo e aumentar nem sempre produz um fluxo máximo. Na Fig. 1.13 o fluxo máximo possível é 40, obtido pelo aumentos de 10 no caminho $P_1 = (s, u, t)$ e 30 no caminho $P_2 = (s, w, t)$. Mas, se aumentamos 10 no caminho $P_1 = (s, u, w, t)$ e depois 20 no caminho $P_2 = (s, w, t)$ obtemos um fluxo de 30 e o grafo não possui mais caminho que aumenta o fluxo. ◊

Problema no caso acima: para aumentar o fluxo e manter a conservação do fluxo num vértice interno v temos quatro possibilidades: (i) aumentar o fluxo num arco entrante e sainte, (ii) aumentar o fluxo num arco entrante, e diminuir num outro arco entrante, (iii) diminuir o fluxo num arco entrante e diminuir num arco sainte e (iv) diminuir o fluxo num arco entrante e aumentar num arco entrante (ver Fig. 1.14).
Isso é a motivação para definir para um dado fluxo f o *grafo residual* G_f com

- Vértices V
- Arcos para frente ("forward") E com capacidade $c_e - f_e$, caso $f_e < c_e$.

- Arcos para atras ("backward") $E' = \{(v,u) \mid (u,v) \in E\}$ com capacidade $c_{(v,u)} = f_{(u,v)}$, caso $f_{(u,v)} > 0$.

Observe que na Fig. 1.13 o grafo residual possui um caminho $P = (s, w, u, t)$ que aumenta o fluxo por 10. O algoritmo de Ford-Fulkerson (Ford e Fulkerson, 1956) consiste em, repetidamente, aumentar o fluxo num caminho s–t no grafo residual.

Algoritmo 1.5 (Ford-Fulkerson)
Entrada Grafo $G = (V, E, c)$ com capacidades c_e no arcos.

Saída Um fluxo f.

```
1  for all e ∈ E: f_e := 0
2  while existe um caminho s--t em G_f do
3    Seja P um caminho s--t simples
4    Aumenta o fluxo f um valor g(f,P)
5  end while
6  return f
```

Análise de complexidade Na análise da complexidade, consideraremos somente capacidades em $\mathbb{N}$ (ou equivalente em $\mathbb{Q}$: todas capacidades podem ser multiplicadas pelo menor múltiplo em comum das denominadores das capacidades.)

Lema 1.14
Para capacidades inteiras, todo fluxo intermediário e as capacidades residuais são inteiros.

Prova. Por indução sobre o número de iterações. Inicialmente $f_e = 0$. Em cada iteração, o "gargalo" $g(f, P)$ é inteiro, porque as capacidades e fluxos são inteiros. Portanto, o fluxo e as capacidades residuais após do aumento são novamente inteiros. ■

Lema 1.15
Em cada iteração, o fluxo aumenta por pelo menos 1.

Prova. O caminho s–t possui por definição do grafo residual uma capacidade "gargalo" $g(f, P) > 0$. O fluxo $f(s)$ aumenta exatamente $g(f, P)$. ■

Lema 1.16
O número de iterações do algoritmo Ford-Fulkerson é limitado por $C = \sum_{e \in \delta^+(s)} c_e$. Portanto ele tem complexidade $O((n + m)C)$.

Prova. C é um limite superior do fluxo máximo. Como o fluxo inicialmente possui valor 0 e aumenta ao menos 1 por iteração, o algoritmo de Ford-Fulkerson termina em no máximo C iterações. Em cada iteração temos que achar um caminho s–t em G_f. Representando G por listas de adjacência, isso é possível em tempo $O(n+m)$ usando uma busca por profundidade. O aumento do fluxo precisa tempo $O(n)$ e a atualização do grafo residual é possível em $O(m)$, visitando todos arcos. ■

Corretude do algoritmo de Ford-Fulkerson

Definição 1.3
Seja $\bar{X} := V \setminus X$. Escrevemos $F(X,Y) := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ para os arcos passando do conjunto X para Y. O fluxo de X para Y é $f(X,Y) := \sum_{e \in F(X,Y)} f_e$.
Ainda estendemos a notação do fluxo total de um vértice (1.5) para conjuntos: $f(X) := f(X,\bar{X}) - f(\bar{X},X)$ é o fluxo neto do saindo do conjunto X.
Analogamente, escrevemos para as capacidades $c(X,Y) := \sum_{e \in F(X,Y)} c_e$. Uma partição $(X,\bar{X})$ é um *corte* s–t, se $s \in X$ e $t \in \bar{X}$.
Um arco e se chama *saturado* para um fluxo f, caso $f_e = c_e$.

Lema 1.17
Para qualquer corte $(X,\bar{X})$ temos $f(X) = f(s)$.

Prova.

$$f(X) = f(X,\bar{X}) - f(\bar{X},X) = \sum_{v \in X} f(v) = f(s).$$

(O último passo é correto, porque para todo $v \in X, v \neq s$, temos $f(v) = 0$ pela conservação do fluxo.) ■

Lema 1.18
O valor $c(X,\bar{X})$ de um corte s–t é um limite superior para um fluxo s–t.

Prova. Seja f um fluxo s–t. Temos

$$f(s) = f(X) = f(X,\bar{X}) - f(\bar{X},X) \leq f(X,\bar{X}) \leq c(X,\bar{X}).$$

■

Consequência: O fluxo máximo é menor ou igual a o corte mínimo. De fato, a relação entre o fluxo máximo e o corte mínimo é mais forte:

Teorema 1.7 (Fluxo máximo – corte mínimo)
O valor do fluxo máximo entre dois vértices s e t é igual ao valor do corte mínimo.

Lema 1.19
Quando o algoritmo de Ford-Fulkerson termina, o valor do fluxo é máximo.

Prova. O algoritmo termina se não existe um caminho entre s e t em G_f. Podemos definir um corte $(X, \bar{X})$, tal que X é o conjunto de vértices alcançáveis em G_f a partir de s. Qual o valor do fluxo nos arcos entre X e $\bar{X}$? Para um arco $e \in F(X, \bar{X})$ temos $f_e = c_e$, senão G_f terá um arco "forward" e, uma contradição. Para um arco $e = (u, v) \in F(\bar{X}, X)$ temos $f_e = 0$, senão G_f terá um arco "backward" $e' = (v, u)$, uma contradição. Logo

$$f(s) = f(X) = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) = f(X, \bar{X}) = c(X, \bar{X}).$$

Pelo lema 1.18, o valor de um fluxo arbitrário é menor ou igual que $c(X, \bar{X})$, portanto f é um fluxo máximo. ■
Prova. (Do teorema 1.7) Pela análise do algoritmo de Ford-Fulkerson. ■

Desvantagens do algoritmo de Ford-Fulkerson O algoritmo de Ford-Fulkerson tem duas desvantagens:

(1) O número de iterações C pode ser alto, e existem grafos em que C iterações são necessárias (veja Fig. 1.15). Além disso, o algoritmo com complexidade $O((n + m)C)$ é somente pseudo-polinomial.

(2) É possível que o algoritmo não termina para capacidades reais (veja Fig. 1.15). Usando uma busca por profundidade para achar caminhos s–t ele termina, mas é ineficiente (Dean, Goemans e Immorlica, 2006).

1.4.2. O algoritmo de Edmonds-Karp

O algoritmo de Edmonds-Karp elimina esses problemas. O princípio dele é simples: Para achar um caminho s–t simples, usa busca por largura, i.e. selecione o caminho mais curto entre s e t. Nos temos

Teorema 1.8
O algoritmo de Edmonds-Karp precisa $O(nm)$ iterações, e portanto termina em tempo $O(nm^2)$.

Lema 1.20
Seja $\delta_f(v)$ a distância entre s e v em G_f. Durante a execução do algoritmo de Edmonds-Karp $\delta_f(v)$ cresce monotonicamente para todos vértices em V.

Prova. Para $v = s$ o lema é evidente. Supõe que uma iteração modificando o fluxo f para f' diminuirá o valor de um vértice $v \in V \setminus \{s\}$, i.e., $\delta_f(v) > \delta_{f'}(v)$.

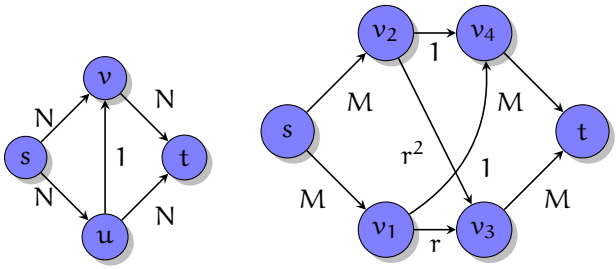


Figura 1.15.: Esquerda: Pior caso para o algoritmo de Ford-Fulkerson com pesos inteiros aumentando o fluxo por $2N$ vezes por 1 nos caminhos (s,u,v,t) e (s,v,u,t). Direita: Menor grafo com pesos irracionais em que o algoritmo de Ford-Fulkerson falha (Zwick, 1995). $M \geq 3$, e $r = (1+\sqrt{1-4\lambda})/2 \approx 0.682$ com $\lambda \approx 0.217$ a única raiz real de $1 - 5x + 2x^2 - x^3$. Aumentar (s,v_1,v_4,t) e depois repetidamente (s,v_2,v_4,v_1,v_3,t), (s,v_2,v_3,v_1,v_4,t), (s,v_1,v_3,v_2,v_4,t), e (s,v_1,v_4,v_2,v_3,t) converge para o fluxo máximo $2+r+r^2$ sem terminar.

Supõe ainda que v é o vértice de menor distância $\delta_{f'}(v)$ em $G_{f'}$ com essa característica. Seja $P = (s,\ldots,u,v)$ um caminho mais curto de s para v em $G_{f'}$. O valor de u não diminuiu nessa iteração (pela escolha de v), i.e., $\delta_f(u) \leq \delta_{f'}(u)$ (*).
O arco (u,v) não existe in G_f, senão a distãncia do v in G_f é no máximo a distância do v in $G_{f'}$: Supondo $(u,v) \in E(G_f)$ temos

$$\begin{aligned}
\delta_f(v) &\leq \delta_f(u) + 1 && \text{pela desigualdade triangular}\\
&\leq \delta_{f'}(u) + 1 && (*)\\
&\leq \delta_{f'}(v) && \text{porque } uv \text{ está num caminho mínimo em } G_{f'},
\end{aligned}$$

uma contradição com a hipótese que a distância de v diminuiu. Portanto, $(u,v) \notin E(G_f)$ mas $(u,v) \in E(G_{f'})$. Isso só é possível se o fluxo de v para u aumentou nessa iteração. Em particular, vu foi parte de um caminho mínimo de s para u. Para $v = t$ isso é uma contradição imediata. Caso $v \neq t$, temos

$$\begin{aligned}
\delta_f(v) &= \delta_f(u) - 1\\
&\leq \delta_{f'}(u) - 1 && (*)\\
&= \delta_{f'}(v) - 2 && \text{porque } uv \text{ está num caminho mínimo em } G_{f'},
\end{aligned}$$

novamente uma contradição com a hipótese que a distância de v diminuiu. Logo, o vértice v não existe. ■

Prova. (do teorema 1.8)
Chama um arco num caminho que aumenta o fluxo com capacidade igual ao gargalo *crítico*. Em cada iteração existe ao menos um arco crítico que desaparece do grafo residual. Provaremos que cada arco pode ser crítico no máximo $n/2 - 1$ vezes, que implica em no máximo $m(n/2 - 1) = O(mn)$ iterações.
No grafo G_f em que um arco $uv \in E$ é crítico pela primeira vez temos $\delta_f(u) = \delta_f(v) - 1$. O arco só aparece novamente no grafo residual caso alguma iteração diminui o fluxo em uv, i.e., aumenta o fluxo vu. Nessa iteração, com fluxo f', $\delta_{f'}(v) = \delta_{f'}(u) - 1$. Em soma temos

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(u) &= \delta_{f'}(v) + 1 \\ &\geq \delta_f(v) + 1 && \text{pelo lema 1.20} \\ &= \delta_f(u) + 2,\end{aligned}$$

i.e., a distância do u entre dois instantes em que uv é crítico aumenta por pelo menos dois. Enquanto u é alcançável por s, a sua distância é no máximo $n - 2$, porque o caminho não contém s nem t, e por isso a aresta uv pode ser crítico por no máximo $(n - 2)/2 = n/2 - 1$ vezes. ■
Zadeh (1972) apresenta instâncias em que o algoritmo de Edmonds-Karp precisa $\Theta(n^3)$ iterações, logo o resultado do teorema 1.8 é o melhor possível para grafos densos.

1.4.3. O algoritmo "caminho mais gordo" ("fattest path")

Idéia (Edmonds e Karp, 1972): usar o caminho de maior gargalo para aumentar o fluxo. (Exercício 1.6 pede provar que isso é possível com uma modificação do algoritmo de Dijkstra em tempo $O(n \log n + m)$.)

Lema 1.21
Um fluxo f pode ser decomposto em fluxos $f_1, \ldots, f_k$ com $k \leq m$ tal que o fluxo f_i é positivo somente num caminho p_i entre s e t.

Prova. Dado um fluxo f, encontra um caminho p de s para t usando somente arcos com fluxo positivo. Define um fluxo no caminho cujo valor é o valor do menor fluxo de algum arco em p. Subtraindo esse fluxo do fluxo f obtemos um novo fluxo reduzido. Repete até o valor do fluxo f é zero.
Em cada iteração pelo menos um arco com fluxo positivo tem fluxo zero depois da subtração do caminho p. Logo o algoritmo termina em no máximo m iterações. ■

Teorema 1.9
O caminho com o maior gargalo aumenta o fluxo por pelo menos OPT/m.

Prova. Considera o fluxo máximo. Pelo lema 1.21 existe uma decomposição do fluxo em no máximo m fluxos em caminhos s-t. Logo um dos caminhos possui valor pelo menos OPT/m. ■

Teorema 1.10
A complexidade do algoritmo de Ford-Fulkerson usando o caminho de maior gargalo é $O((n \log n + m) m \log C)$ para um limitante superior C do fluxo máximo.

Prova. Seja f_i o valor do caminho encontrado na i-ésima iteração, G_i o grafo residual após do aumento e OPT_i o fluxo máximo em G_i. Observe que G_0 é o grafo de entrada e $\mathrm{OPT}_0 = \mathrm{OPT}$ o fluxo máximo. Temos

$$\mathrm{OPT}_{i+1} = \mathrm{OPT}_i - f_i \leq \mathrm{OPT}_i - \mathrm{OPT}_i/(2m) = (1 - 1/(2m))\mathrm{OPT}_i.$$

A desigualdade é válida pelo teorema 1.9, considerando que o grafo residual possui no máximo $2m$ arcos. Logo

$$\mathrm{OPT}_i \leq (1 - 1/(2m))^i \mathrm{OPT} \leq e^{-i/(2m)} \mathrm{OPT}.$$

O algoritmo termina caso $\mathrm{OPT}_i < 1$, por isso número de iterações é no máximo $2m \ln \mathrm{OPT} + 1$. Cada iteração custa $O(m + n \log n)$. ■

Corolário 1.3
Caso U é um limite superior da capacidade de um arco, o algoritmo termina em no máximo $O(m \log mU)$ passos.

1.4.4. O algoritmo push-relabel

O algoritmo push-relabel é um representante da classe de algoritmos que não trabalha com um fluxo e caminhos aumentantes, mas mantém um *pré-fluxo* f que satisfaz

- os limites de capacidade ($0 \leq f_e \leq c_e$)
- e requer somente que o *excesso* $e(v) = -f(v)$ de um vértice $v \neq s$ é não-negativo.

Um vértice $v \neq t$ com $e(v) > 0$ é chamado *ativo*. A ideia do algoritmo é que vértices possuem uma "altura" e o fluxo passa para vértices de altura mais baixa ("operação push") ou, caso isso não é possível a altura de um vértice ativo aumenta ("operação relabel"). Concretamente, manteremos um *potencial* ("altura") p_v para cada $v \in V$, tal que,

$$\begin{aligned} p_s = n; \quad p_t = 0; & \qquad (*) \\ p_v \geq p_u - 1 & \qquad (u, v) \in A(G_f). \end{aligned}$$

Observe que o segundo parte da condição precisa ser satisfeita somente para arcos no grafo residual.

Observação 1.13
Pela condição (*), para um caminho $v_0, v_1, \ldots, v_k$ em G_f temos $p_{v_0} \leq p_{v_1} + 1 \leq p_{v_2} + 2 \leq \cdots \leq p_{v_k} + k$. ◊

Lema 1.22
A condição (*) pode ser satisfeita sse G_f não possui caminho s–t.

Prova. "⇒": Supõe existe um caminho s–t simples $v_0 = s, v_1, \ldots, v_k = t$. Pela observação (1.13)

$$p_s = p_{v_0} \leq p_{v_k} + k = p_t + k = k < n - 1,$$

uma contradição. "⇐": Sejam X os vértices alcançáveis em G_f a partir de s (incluindo s). Define $p_v = n$ para $v \in X$ e $p_v = 0$ para $v \in \overline{X}$. ■

O lema mostra que enquanto algoritmos de caminho aumentante são algoritmos primais, mantendo uma solução factível, até encontrar o ótimo, algoritmos da classe push-relabel podem ser vistos como algoritmos duais: eles mantém o critério de otimalidade (*), até encontrar uma solução factível.

Podemos realizar as operações "push" e "relabel" como segue. A operação "push(u, v)" num arco $(u, v) \in A(G_f)$ manda o fluxo $\min\{c_a, e(v)\}$ de u para v. A operação "relabel(v) aumenta a altura p_v do vértice v por uma unidade.

```
1  push(u,v) :=
2    { pré-condição: u é ativo }
3    { pré-condição: p_v = p_u − 1 }
4    { pré-condição: (u,v) ∈ A(G_f) }
5    aumenta o fluxo em (u,v) por min{c_(u,v), e(u)}
6    { atualiza G_f de acordo }
7  end
8
9  relabel(v) :=
10   { pré-condição: v é ativo }
11   { pré-condição: não existe (u,v) ∈ A(G_f) com p_v = p_u − 1 }
12   p_v := p_v + 1
13 end
```

Observe que as duas operações mantém a condição (*).

Algoritmo 1.6 (Push-relabel)
Entrada Grafo $G = (V, A, c)$ com capacidades c_a no arcos.

Saída Um fluxo f.

```
1  p_s := n;  p_v := 0,      ∀v ∈ V \ {s}
2  f_a := c_a,  ∀a ∈ δ⁺(s) senão f_a := 0
3  while existe vértice ativo do
4    escolhe o vértice ativo u de maior p_u
5    repete até u é inativo
6      if existe arco (u,v) ∈ G_f com p_v = p_u − 1 then
7        push(u,v)
8      else
9        relabel(u)
10     end if
11   end
12 end while
13 return f
```

Lema 1.23
O algoritmo push-relabel é parcialmente correto (i.e. correto caso termina).

Prova. Ao terminar não existe vértice ativo. Logo f é um fluxo. Pelo lema 1.22 não existe caminho s–t em G_f. Logo pelo teorema 1.7 o fluxo é ótimo. ■
A terminação é garantido por

Teorema 1.11
O algoritmo push-relabel executa $O(n^3)$ operações push e $O(n^2)$ operações relabel.

Prova. Um vértice ativo v tem excesso de fluxo, logo existe um caminho v–s em G_f. Por (1.13) $p_v \leq p_s + (n-1) < 2n$, e o número de operações relabel é no $O(n^2)$. Supõe que uma operação push satura um arco $a = (u,v)$ (i.e. manda fluxo c_a). Para mandar fluxo novamente, temos que mandar primeiramente fluxo de v para u; isso só pode ser feito depois de pelo menos duas operações relabel em v. Logo o número de operações push saturantes é $O(mn)$. Para operações push não-saturantes, podemos observar que entre duas operações relabel temos no máximo n desses operações, porque cada uma torna o vértice de maior p_v inativo (talvez ativando vértices de menor potentical), logo tem no máximo $O(n^3)$ deles. ■
Para garantir uma complexidade de $O(n^3)$ temos que implementar um "push" em $O(1)$ e um "relabel" em $O(n)$. Para este fim, manteremos uma lista dos vértices em ordem do potencial. Para cada vértice manteremos uma lista de arcos candidatos para operações push, i.e. arcos para vizinhos com potencial um a menos com capacidade residual positiva.
Uma busca linear na lista de vértices encontra o vértice de maior potencial. Entre dois operações relabel a busca pode continuar no último ponto e precisa

Tabela 1.3.: Complexidade de diversos algoritmos de fluxo máximo (Schrijver, 2003).

Ano	Referência	Complexidade	Obs
1951	Dantzig	$O(n^2mC)$	Simplex
1955	Ford & Fulkerson	$O(mC) = O(mnU)$	Cam. aument.
1970	Dinitz	$O(nm^2)$	Cam. min. aument.
1972	Edmonds & Karp	$O(m^2 \log C)$	Escalonamento
1973	Dinitz	$O(nm \log C)$	Escalonamento
1974	Karzanov	$O(n^3)$	Preflow-Push
1977	Cherkassky	$O(n^2m^{1/2})$	Preflow-Push
1986	Goldberg & Tarjan	$O(nm \log(n^2/m))$	Push-Relabel
1987	Ahuja & Orlin	$O(nm + n^2 \log C)$	Push-Relabel & Esc.
1990	Cheriyan et al.	$O(n^3/\log n)$	
1990	Alon	$O(nm + n^{8/3} \log n)$	
1992	King et al.	$O(nm + n^{2+\epsilon})$	
1997	Goldberg & Rao	$O(m^{3/2} \log(n^2/m) \log C)$	
		$O(n^{2/3}m \log(n^2/m) \log C)$	
2012	Orlin	$O(nm)$	

tempo $O(n)$ em total, logo a busca custa no máximo $O(n^3)$ sobre toda execução do algoritmo. Para a operação push podemos simplesmente consultar a lista de candidatos. Para um push saturante, o candidato será removido. Isso custa $O(1)$. Finalmente no caso de um relabel temos que encontrar em $O(n)$ a nova posição do vértice na lista, e reconstruir a lista de candidatos, que também precisa tempo $O(n)$. Logo todas operações relabel custam não mais que $O(n^3)$.

1.4.5. Variações do problema

Fontes e destinos múltiplos Para $G = (V, E, c)$ define um conjunto de fontes $S \subseteq V$ e um conjunto de destinos $T \subseteq V$, com $S \cap T = \emptyset$, e considera

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & f(S) \\ \textbf{sujeito a} \quad & f(v) = 0 \qquad \forall v \in V \setminus (S \cup T) \\ & f_e \leq c_e \qquad \forall e \in E. \end{aligned} \tag{1.7}$$

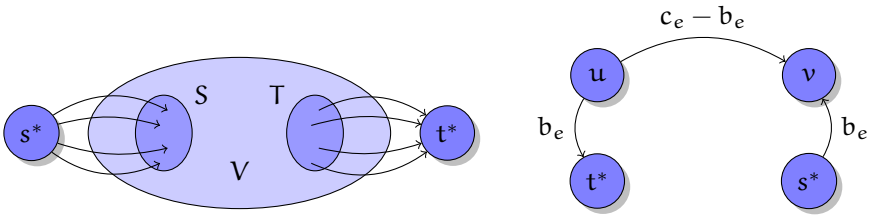


Figura 1.16.: Reduções entre variações do problema do fluxo máximo. Esquerda: Fontes e destinos múltiplos. Direita: Limite inferior e superior para a capacidade de arcos.

O problema (1.7) pode ser reduzido para um problema de fluxo máximo simples em $G' = (V', E', c')$ (veja Fig. 1.16(a)) com

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s^*, t^*\} \\ E' &= E \cup \{(s^*, s) \mid s \in S\} \cup \{(t, t^*) \mid t \in T\} \\ c'_e &= \begin{cases} c_e & e \in E \\ c(S, \bar{S}) & e = (s^*, s) \\ c(\bar{T}, T) & e = (t, t^*) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Lema 1.24
Se f' é solução máxima de (1.8), $f = f'|_E$ é uma solução máxima de (1.7). Conversamente, se f é uma solução máxima de (1.7),

$$f'_e = \begin{cases} f_e & e \in E \\ f(s) & e = (s^*, s) \\ -f(t) & e = (t, t^*) \end{cases}$$

é uma solução máxima de (1.8).

Prova. Supõe f é solução máxima de (1.7). Seja f' uma solução de (1.8) com valor $f'(s^*)$ maior. Então $f'|_E$ é um fluxo válido para (1.7) com solução $f'|_E(S) = f'(s^*)$ maior, uma contradição.
Conversamente, para cada fluxo válido f em G, a extensão f' definida acima é um fluxo válido em G' com o mesmo valor. Portanto o valor do maior fluxo em G' é maior ou igual ao valor do maior fluxo em G. ■

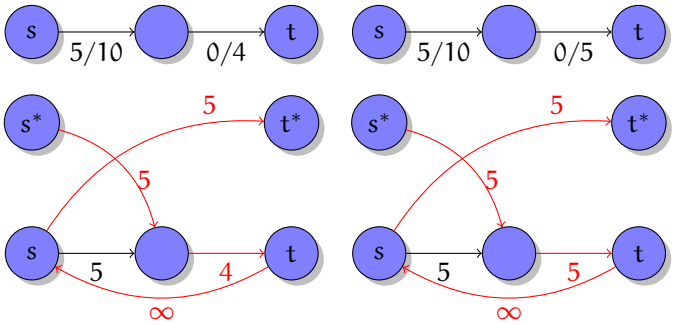


Figura 1.17.: Dois exemplos da transformação do lema 1.25. Esquerda: Grafo sem solução viável e grafo transformado com fluxo máximo 4. Direita: Grafo com solução viável e grafo transformado com fluxo máximo 5.

Limites inferiores Para $G = (V, E, b, c)$ com limites inferiores $b : E \to \mathbb{R}$ considere o problema

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & f(s) \\ \textbf{sujeito a} \quad & f(v) = 0 && \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\ & b_e \le f_e \le c_e && e \in E. \end{aligned} \tag{1.9}$$

O problema (1.9) pode ser reduzido para um problema de fluxo máximo simples em $G' = (V', E', c')$ (veja Fig. 1.16(b)) com

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s^*, t^*\} \\ E' &= E \cup \{(u,t^*) \mid (u,v) \in E\} \cup \{(s^*,v) \mid (u,v) \in E\} \cup \{(t^*,s^*)\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$c'_e = \begin{cases} c_e - b_e & e \in E \\ \sum_{v \in N^+(u)} b_{(u,v)} & e = (u,t^*) \\ \sum_{u \in N^-(v)} b_{(u,v)} & e = (s^*,v) \\ \infty & e = (t,s) \end{cases}$$

Lema 1.25
Problema (1.9) possui uma solução viável sse (1.10) possui uma solução máxima com todos arcos auxiliares $E' \setminus E$ saturados. Neste caso, se f é um fluxo

máximo em (1.9),

$$f'_e = \begin{cases} f_e - b_e & e \in E \\ \sum_{u \in N^+(v)} b_{(v,u)} & e = (v, t^*) \\ \sum_{u \in N^-(v)} b_{(u,v)} & e = (s^*, u) \\ f(s) & e = (t, s) \end{cases}$$

é um fluxo máximo de (1.10) com arcos auxiliares saturados. Conversamente, se f' é um fluxo máximo para (1.10) com arcos auxiliares saturados, $f_e = f'_e + b_e$ é um fluxo máximo em (1.9).

Prova. (Exercício.) ■

Para obter um fluxo máximo de (1.9) podemos maximizar o fluxo a partir da solução viável obtida, com qualquer variante do algoritmo de Ford-Fulkerson. Uma alternativa para obter um fluxo máximo com limites inferiores nos arcos é primeiro mandar o limite inferior de cada arco, que torna o problema num problema de encontrar o fluxo s-t máximo num grafo com demandas.

Existência de uma circulação com demandas Para $G = (V, E, c)$ com demandas d_v, com $d_v > 0$ para destinos e $d_v < 0$ para fontes, considere

$$\begin{array}{rll} \textbf{existe} & f & \\ \textbf{s.a} & f(v) = -d_v & \forall v \in V \\ & f_e \leq c_e & e \in E. \end{array} \tag{1.11}$$

Evidentemente $\sum_{v \in V} d_v = 0$ é uma condição necessária (lema (1.12)). O problema (1.11) pode ser reduzido para um problema de fluxo máximo em $G' = (V', E')$ com

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s^*, t^*\} \\ E' &= E \cup \{(s^*, v) \mid v \in V, d_v < 0\} \cup \{(v, t^*) \mid v \in V, d_v > 0\} \\ c_e &= \begin{cases} c_e & e \in E \\ -d_v & e = (s^*, v) \\ d_v & e = (v, t^*) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Lema 1.26
Problema (1.11) possui uma solução sse problema (1.12) possui uma solução com fluxo máximo $D = \sum_{v: d_v > 0} d_v$.

Prova. (Exercício.) ■

Circulações com limites inferiores Para $G = (V, E, b, c)$ com limites inferiores e superiores, considere

$$\begin{array}{rll} \textbf{existe} & f & \\ \textbf{s.a} & f(v) = d_v & \forall v \in V \\ & b_e \leq f_e \leq c_e & e \in E. \end{array} \tag{1.13}$$

O problema pode ser reduzido para a existência de uma circulação com somente limites superiores em $G' = (V', E', c', d')$ com

$$\begin{aligned} V' &= V \\ E' &= E \\ c_e &= c_e - b_e \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$d'_v = d_v - \sum_{e \in \delta^-(v)} b_e + \sum_{e \in \delta^+(v)} b_e \tag{1.15}$$

Lema 1.27
O problema (1.13) possui solução sse problema (1.14) possui solução.

Prova. (Exercício.) ■

1.4.6. Aplicações

Projeto de pesquisa de opinião O objetivo é projetar uma pesquisa de opinião, com as restrições

- Cada cliente i recebe ao menos c_i perguntas (para obter informação suficiente) mas no máximo c'_i perguntas (para não cansar ele). As perguntas podem ser feitas somente sobre produtos que o cliente já comprou.
- Para obter informações suficientes sobre um produto, entre p_i e p'_i clientes tem que ser interrogados sobre ele.

Um modelo é um grafo bi-partido entre clientes e produtos, com aresta (c_i, p_j) caso cliente i já comprou produto j. O fluxo de cada aresta possui limite inferior 0 e limite superior 1. Para representar os limites de perguntas por produto e por cliente, introduziremos ainda dois vértices s, e t, com arestas (s, c_i) com fluxo entre c_i e c'_i e arestas (p_j, t) com fluxo entre p_j e p'_j e uma aresta (t, s).

Segmentação de imagens O objetivo é segmentar um imagem em duas partes, por exemplo "foreground" e "background". Supondo que temos uma "probabilidade" a_i de pertencer ao "foreground" e outra "probabilidade" de pertencer ao "background" b_i para cada pixel i, uma abordagem direta é definir que pixels com $a_i > b_i$ são "foreground" e os outros "background". Um exemplo pode ser visto na Fig. 1.19 (b). A desvantagem dessa abordagem é que a separação ignora o contexto de um pixel. Um pixel, "foreground" com todos pixel adjacentes em "background" provavelmente pertence ao "background" também. Portanto obtemos um modelo melhor introduzindo penalidades p_{ij} para separar (atribuir à categorias diferentes) pixel adjacentes i e j. Um partição do conjunto de todos pixels I em $A \dot\cup B$ tem um valor de

$$q(A,B) = \sum_{i\in A} a_i + \sum_{i\in B} b_i - \sum_{(i,j)\in A\times B} p_{ij}$$

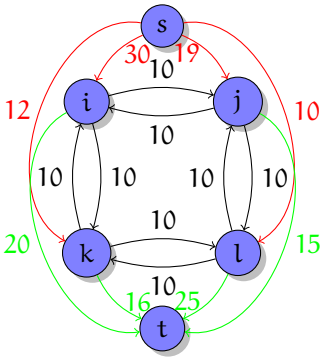
nesse modelo, e o nosso objetivo é achar uma partição que maximiza $q(A,B)$. Isso é equivalente a minimizar

$$\begin{aligned} Q(A,B) &= \sum_{i\in I} a_i + b_i - \sum_{i\in A} a_i - \sum_{i\in B} b_i + \sum_{(i,j)\in A\times B} p_{ij} \\ &= \sum_{i\in B} a_i + \sum_{i\in A} b_i + \sum_{(i,j)\in A\times B} p_{ij}. \end{aligned}$$

A solução mínima de $Q(A,B)$ pode ser visto como corte mínimo num grafo. O grafo possui um vértice para cada pixel e uma aresta com capacidade p_{ij} entre dois pixels adjacentes i e j. Ele possui ainda dois vértices adicionais s e t, arestas (s,i) com capacidade a_i para cada pixel i e arestas (i,t) com capacidade b_i para cada pixel i (ver Fig. 1.18).

Sequenciamento O objetivo é programar um transporte com um número k de veículos disponíveis, dado pares de origem-destino com tempo de saída e chegada. Um exemplo é um conjunto de vôos é

1. Porto Alegre (POA), 6.00 – Florianopolis (FLN), 7.00
2. Florianopolis (FLN), 8.00 – Rio de Janeiro (GIG), 9.00
3. Fortaleza (FOR), 7.00 – João Pessoa (JPA), 8.00
4. São Paulo (GRU), 11.00 – Manaus (MAO), 14.00
5. Manaus (MAO), 14.15 – Belem (BEL), 15.15



	i	j	k	l
a	30	19	12	10
b	20	15	16	25

Figura 1.18.: Exemplo da construção para uma imagem 2×2. Direita: Tabela com valores pele/não-pele. Esquerda: Grafo com penalidade fixa $p_{ij} = 10$.

Figura 1.19.: Segmentação de imagens com diferentes penalidades p. Acima: (a) Imagem original (b) Segmentação somente com probabilidades ($p = 0$) (c) $p = 1000$ (d) $p = 10000$. Abaixo: (a) Walter Gramatté, Selbstbildnis mit rotem Mond, 1926 (b) Segmentação com $p = 10000$. A probabilidade de um pixel representar pele foi determinado conforme Jones e Rehg (1998).

6. Salvador (SSA), 17.00 – Recife (REC), 18.00

O mesmo avião pode ser usado para mais que um par de origem e destino, se o destino do primeiro é o origem do segundo, em tem tempo suficiente entre a chegada e saída (para manutenção, limpeza, etc.) ou tem tempo suficiente para deslocar o avião do destino para o origem.
Podemos representar o problema como grafo direcionado acíclico. Dado pares de origem destino, ainda adicionamos pares de destino-origem que são compatíveis com as regras acimas. A idéia é representar aviões como fluxo: cada aresta origem-destino é obrigatório, e portanto recebe limites inferiores e superiores de 1, enquanto uma aresta destino-origem é facultativa e recebe limite inferior de 0 e superior de 1. Além disso, introduzimos dois vértices s e t, com arcos facultativos de s para qualquer origem e de qualquer destino para t, que representam os começos e finais da viagem completa de um avião. Para decidir se existe um solução com k aviões, finalmente colocamos um arco (t, s) com limite inferior de 0 e superior de k e decidir se existe uma circulação nesse grafo.

O problema $P \mid \text{pmtn}, r_i \mid L_{\max}$ Primeiramente resolveremos um problema mais simples: será que existe um sequenciamento tal que toda tarefa i executa dentro do seu intervalo $[r_i, d_i]$? Equivalentemente, será que existe uma solução com $L_{\max} = 0$?
Seja $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} = \{r_1, r_2, \ldots r_n\} \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, com $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$. (Observe que $k \leq 2n$, e $k < 2n$ no caso de tempos repetidos.) Podemos ver os t_i como eventos em que uma tarefa fica disponível ou tem que terminar o seu processamento. Os t_i definem $k-1$ intervalos $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ para $i \in [k-1]$ com duração $S_i = t_{i+1} - t_i$ correspondente. Cada tarefa j pode ser executada no intervalo T_i caso $I_i \subseteq [r_i, d_i]$. Logo podemos modelar o problema via um grafo direcionado bipartido com vértices $T \dot\cup I$, sendo $T = [n]$ o conjunto de tarefas e $I = \{I_i \mid i \in [k-1]\}$ o conjunto de intervalos, e com arcos (j, i) caso tarefa j pode ser executada no intervalo i. Para completar o grafo adicionaremos um arco (s, j) de um vértice origem s para cada tarefa j, e um arco (i, t) de cada intervalo para um vértice destino t. Um fluxo nesse grafo representa tempo, e teremos capacidades p_j entre s e tarefa j, S_i entre tarefa j e intervalo i, e mS_i entre T_i e t, sendo mS_i o tempo total disponível durante o intervalo i. A figura 1.20 mostra a construção completa.
Logo $P \mid \text{pmtn}, r_i \mid L_{\max}$ pode ser resolvido em tempo $O(mn \log \bar{L})$.
Com essa abordagem podemos resolver o problema original por busca binária: para cada valor do $L_{\max}$ entre 0 e $\bar{L}$ testaremos se existe uma solução tal que cada tarefa executa no intervalo $[r_i, d_i + L_{\max}]$. Um limite superior simples é

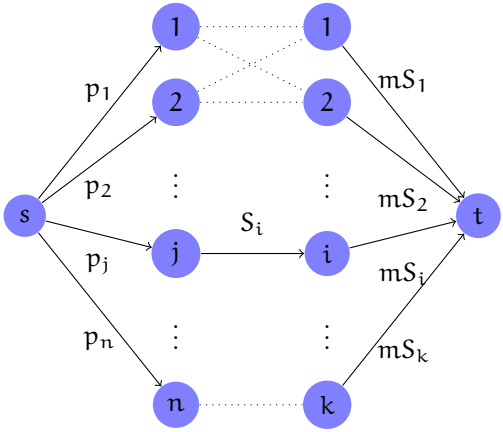


Figura 1.20.: Problema de fluxo para resolver a versão de decisão do problema $P \mid pmtn, r_i \mid L_{max}$.

$\bar{L} = \max_i r_i + \sum_i p_i - \min_i d_i$ executando todas tarefas após a liberação da última numa única máquina em ordem arbitrária.

Agendamento de projetos Suponha que temos n projetos, cada um com lucro $p_i \in \mathbb{Z}$, $i \in [n]$, e um grafo de dependências $G = ([n], A)$ sobre os projetos. Caso $(i, j) \in A$, a execução do projeto i é pré-requisito para a execução do projeto j. Um lucro pode ser negativo: neste caso tem uma perda efetiva. Este problema pode ser reduzido para um problema de fluxo máximo s-t: cria um grafo G' com vértices $\{s, t\} \cup [n]$ é

- uma aresta (s, v) para todo $v \in [n]$ com $p_v > 0$, com capacidade p_v,
- uma aresta (v, t) para todo $v \in [n]$ com $p_v < 0$, com capacidade $-p_v$, e
- uma aresta (u, v) para toda dependência $(v, u) \in A$, com capacidade ∞.

Lema 1.28
O valor de um corte $(X, \bar{X})$ em G' é mínimo, sse o lucro total dos projetos $S = X \setminus \{s\}$ é máximo. Além disso um corte mínimo em G' corresponde a uma seleção factível de projetos S.

Prova. Cada corte $(X, \bar{X})$ corresponde com uma seleção de projetos $S = X \setminus \{s\}$. Seja $\bar{S} = [n] \setminus S$. Uma seleção de projetos S é válida, caso para todo projeto $p \in S$, ela contém também todos projetos pré-requisitos de p. O corte correspondente não possui arcos com capacidade ∞. Como o valor do corte

$(s, V \setminus \{s\})$ é $\sum_{i,j|p_{ij}>0} p_{ij}$ o corte mínimo é finito, e logo factível, porque não existe um arco entre um projeto selecionado e um projeto não selecionado. O valor de um corte factível é

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{a \in F(X,\bar{X})} c_a = \sum_{p \in \bar{S}|p_{ij}>0} p_{ij} - \sum_{p \in S|p_{ij}<0} p_{ij}$$

e nos temos

$$\begin{aligned}\sum_{p \in [n]|p_{ij}>0} p_{ij} - c(X, \bar{X}) &= \sum_{p \in [n]|p_{ij}>0} p_{ij} - \sum_{p \in \bar{S}|p_{ij}>0} p_{ij} + \sum_{p \in S|p_{ij}<0} p_{ij} \\ &= \sum_{p \in S|p_{ij}>0} p_{ij} + \sum_{p \in S|p_{ij}<0} p_{ij} \\ &= \sum_{p \in S} p_{ij}\end{aligned}$$

i.e o lucro total da seleção S. Logo o lucro total é máximo sse o valor do corte é mínimo. ■

1.4.7. Outros problemas de fluxo

Obtemos um outro problema de fluxo em redes introduzindo *custos* de transporte por unidade de fluxo:

FLUXO DE MENOR CUSTO

Entrada Grafo direcionado $G = (V, E)$ com capacidades $c \in \mathbb{R}_+^{|E|}$ e custos $r \in \mathbb{R}_+^{|E|}$ nos arcos, um vértice origem $s \in V$, um vértice destino $t \in V$, e valor $v \in \mathbb{R}_+$.

Solução Um fluxo s-t f com valor v.

Objetivo Minimizar o *custo* $\sum_{e \in E} c_e f_e$ do fluxo.

Diferente do problema de menor fluxo, o valor do fluxo é fixo.

1.4.8. Exercícios

Exercício 1.6

Mostra como podemos modificar o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mais curto entre dois vértices num um grafo para encontrar o caminho com o maior gargalo entre dois vértices. (Dica: Enquanto o algoritmo de Dijkstra procura o caminho com a menor soma de distâncias, estamos procurando o caminho com o maior capacidade mínimo.)

1.5. Emparelhamentos

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, A)$, um *emparelhamento* é uma seleção de arestas $M \subseteq A$ tal que todo vértice tem no máximo grau 1 em $G' = (V, M)$. (Notação: $M = \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots\}$.) O nosso interesse em emparelhamentos é maximizar o número de arestas selecionados ou, no caso as arestas possuem pesos, maximizar o peso total das arestas selecionados.
Para um grafo com pesos $c : A \to \mathbb{Q}$, seja $c(M) = \sum_{e \in M} c_e$ o *valor* do emparelhamento M.

EMPARELHAMENTO MÁXIMO (EM)

Entrada Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$.

Solução Um emparelhamento $M \subseteq A$, i.e. um conjunto de arcos, tal que para todos vértices v temos $|N(v) \cap M| \leq 1$.

Objetivo Maximiza $|M|$.

EMPARELHAMENTO DE PESO MÁXIMO (EPM)

Entrada Um grafo não-direcionado $G = (V, A, c)$ com pesos $c : A \to \mathbb{Q}$ nas arestas.

Solução Um emparelhamento $M \subseteq A$.

Objetivo Maximiza o valor $c(M)$ de M.

Um emparelhamento se chama *perfeito* se todo vértice possui vizinho em M. Uma variação comum do problema é

EMPARELHAMENTO PERFEITO DE PESO MÍNIMO (EPPM)

Entrada Um grafo não-direcionado $G = (V, A, c)$ com pesos $c : A \to \mathbb{Q}$ nas arestas.

Solução Um emparelhamento perfeito $M \subseteq A$, i.e. um conjunto de arcos, tal que para todos vértices v temos $|N(v) \cap M \models 1$.

Objetivo Minimiza o valor $c(M)$ de M.

Observe que os pesos em todos problemas podem ser negativos. O problema de encontrar um emparelhamento de peso mínimo em $G = (V, A, c)$ é equivalente

com EPM em $-G := (V, A, -c)$ (por quê?). Até EPPM pode ser reduzido para EPM.

Teorema 1.12
EPM e EPPM são problemas equivalentes.

Prova. Seja $G = (V, A, c)$ uma instância de EPM. Define um conjunto de vértices V' que contém V e mais $|V|$ novos vértices e um grafo completo $G' = (V', V' \times V', c')$ com

$$c'_a = \begin{cases} -c_a & \text{caso } a \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Dado um emparelhamento M em G podemos definir um emparelhamento perfeito M' em G': M' inclui todas arestas em M. Além disso, um vértice em V não emparelhado em M será emparelhado com o novo vértice correspondente em V' com uma aresta de custo 0 em M'. Similarmente, os restantes vértices não emparelhados em V' são emparelhados em M' com arestas de custo 0 entre si. Pela construção, o valor de M' é $c'(M') = -c(M)$. Dado um emparelhamento M' em G' podemos obter um emparelhamento M em G com valor $-c(M')$ removendo as arestas que não pertencem a G. Portanto, um EPPM em G' é um EPM em G.

Conversamente, seja $G = (V, A, c)$ uma instância de EPPM. Define $C := 1 + \sum_{a \in A} |c_a|$, novos pesos $c'_e = C - c_e$ e um grafo $G' = (V, A, c')$. Para emparelhamentos M_1 e M_2 em G arbitrários temos

$$c(M_2) - c(M_1) \leq \sum_{\substack{a \in A \\ c_a > 0}} c_a - \sum_{\substack{a \in A \\ c_a < 0}} c_a = \sum_{a \in A} |c_a| < C.$$

Portanto, um emparelhamento de peso máximo em G' também é um emparelhamento de cardinalidade máxima: Para $|M_1| < |M_2|$ temos

$$c'(M_1) = C|M_1| - c(M_1) < C|M_1| + C - c(M_2) \leq C|M_2| - c(M_2) = c'(M_2).$$

Se existe um emparelhamento perfeito no grafo original G, então o EPM em G' é perfeito e as arestas do EPM em G' definem um EPPM em G. ■

Formulações com programação inteira A formulação do problema do emparelhamento perfeito mínimo para $G = (V, A, c)$ é

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{a \in A} c_a x_a && (1.16)\\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{uv} = 1, && \forall v \in V \\ & x_a \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

A formulação do problema do emparelhamento máximo é

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & \sum_{a \in A} c_a x_a && (1.17)\\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \leq 1, && \forall v \in V \\ & x_a \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Observação 1.14
A matriz de coeficientes de (1.16) e (1.17) é totalmente unimodular no caso bipartido (pelo teorema de Hoffman-Kruskal). Portanto: a solução da relaxação linear é inteira. (No caso geral isso não é verdadeiro, K_3 é um contra-exemplo, com solução ótima 3/2.). Observe que isso resolve o caso ponderado sem custo adicional. ◊

Observação 1.15
O dual da relaxação linear de (1.16) é

$$\begin{aligned} \text{CIM: } \textbf{maximiza} \quad & \sum_{v \in V} y_v && (1.18)\\ \textbf{sujeito a} \quad & y_u + y_v \leq c_{uv}, && \forall uv \in A \\ & y_v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

e o dual da relaxação linear de (1.17)

$$\begin{aligned} \text{MVC: } \textbf{minimiza} \quad & \sum_{v \in V} y_v && (1.19)\\ \textbf{sujeito a} \quad & y_u + y_v \geq c_{uv}, && \forall uv \in A \\ & y_v \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Com pesos unitários $c_{uv} = 1$ e restringindo $y_v \in \mathbb{B}$ o primeiro dual é a formulação do conjunto independente máximo e o segundo da cobertura de vértices mínima. Portanto, a observação 1.14 rende no caso não-ponderado:

Teorema 1.13 (Berge, 1951)
Em grafos bi-partidos o tamanho da menor cobertura de vértices é igual ao tamanho do emparelhamento máximo.

Proposição 1.5
Um subconjunto de vértices $I \subseteq V$ de um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ é um conjunto independente sse $V \setminus I$ é um cobertura de vértices. Em particular um conjunto independente máximo I corresponde com uma cobertura de vértices mínima $V \setminus I$.

Prova. (Exercício 1.8.) ■ ◊

1.5.1. Aplicações

Alocação de tarefas Queremos alocar n tarefas a n trabalhadores, tal que cada tarefa é executada, e cada trabalhador executa uma tarefa. O custos de execução dependem do trabalhar e da tarefa. Isso pode ser resolvido como problema de emparelhamento perfeito mínimo.

Particionamento de polígonos ortogonais

Teorema 1.14 (Sack e Urrutia (2000, cap. 11, th. 1)**)**
Um polígono ortogonal com n vértices de reflexo (ingl. reflex vertex, i.e., com ângulo interno maior que π), h buracos (ingl. holes) pode ser minimalmente particionado em $n - l - h + 1$ retângulos. A variável l é o número máximo de cordas (diagonais) horizontais ou verticais entre vértices de reflexo sem intersecção.

O número l é o tamanho do conjunto independente máximo no grafo de intersecção das cordas: cada corda é representada por um vértice, e uma aresta representa a duas cordas com interseção. Pela proposição 1.7 podemos obter uma cobertura mínima via um emparelhamento máximo, que é o complemento de um conjunto independente máximo. Podemos achar o emparelhamento em tempo $O(n^{5/2})$ usando o algoritmo de Hopcroft-Karp, porque o grafo de intersecção é bi-partido (por quê?).

Problemas de agendamento O problema $1 \mid p_j = p \mid \sum w_j T_j$ é resolvido por um emparelhamento perfeito entre as tarefas e os intervalos de execução $[(i-1)p, ip]$, $i \in [n]$. Podemos resolver ainda $1 \mid p_j = 1, r_j \mid \sum w_j T_j$, observando que sempre existe uma solução com as tarefas executando nos intervalos $[t_i, t_i + 1]$, $i \in [n]$, definido por

$$t_0 = -\infty; \qquad t_i = \max\{t_{i-1} + 1; r_i\}$$

e supondo que $r_1 \leq \cdots \leq r_n$.

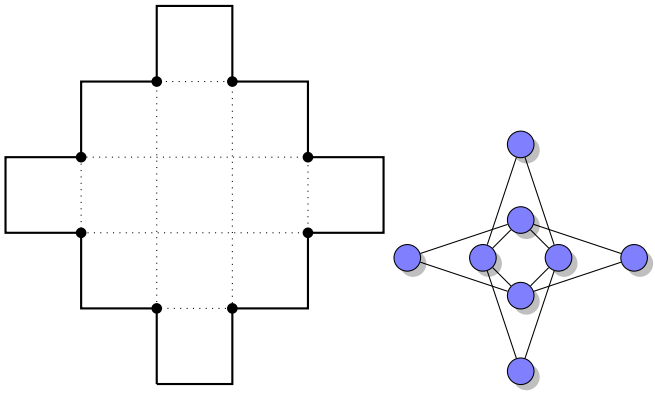


Figura 1.21.: Esquerda: Polígono ortogonal com $n = 8$ vértices de reflexo (pontos), $h = 0$ buracos. As cordas são pontilhadas. Direita: grafo de intersecção.

1.5.2. Grafos bi-partidos

Na formulação como programa inteira a solução do caso bi-partido é mais fácil. Isso também é o caso para algoritmos combinatoriais, e portanto começamos estudar grafos bi-partidos.

Redução para o problema do fluxo máximo

Teorema 1.15
Um EM em grafos bi-partidos pode ser obtido em tempo $O(mn)$.

Prova. Introduz dois vértices s, t, liga s para todos vértices em V_1, os vértices em V_1 com vértices em V_2 e os vértices em V_2 com t, com todos os pesos unitários. Aplica o algoritmo de Ford-Fulkerson para obter um fluxo máximo. O número de aumentos é limitado por n, cada busca tem complexidade $O(m)$, portanto o algoritmo de Ford-Fulkerson termina em tempo $O(mn)$. ■

Teorema 1.16
O valor do fluxo máximo é igual a cardinalidade de um emparelhamento máximo.

Prova. Dado um emparelhamento máximo $M = \{v_{11}v_{21}, \ldots, v_{1n}v_{2n}\}$, podemos construir um fluxo com arcos sv_{1i}, $v_{1i}v_{2i}$ e $v_{2i}t$ com valor $|M|$.
Dado um fluxo máximo, existe um fluxo integral equivalente (veja lema (1.14)). Na construção acima os arcos possuem fluxo 0 ou 1. Escolhe todos arcos entre

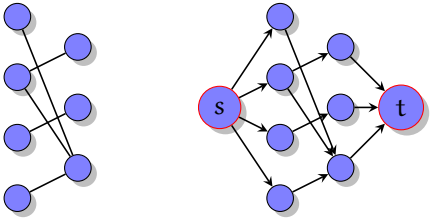


Figura 1.22.: Redução do problema de emparelhamento máximo para o problema do fluxo máximo

V_1 e V_2 com fluxo 1. Não existe vértice com grau 2, pela conservação de fluxo. Portanto, os arcos formam um emparelhamento cuja cardinalidade é o valor do fluxo. ■

Solução não-ponderada combinatorial Um caminho $P = v_1v_2v_3 \dots v_k$ é *alternante* em relação a M (ou M-alternante) se $v_iv_{i+1} \in M$ sse $v_{i+1}v_{i+2} \notin M$ para todos $1 \leq i \leq k-2$. Um vértice $v \in V$ é *livre* em relação a M se ele tem grau 0 em M, e *emparelhado* caso contrário. Um arco $e \in E$ é *livre* em relação a M, se $e \notin M$, e *emparelhado* caso contrário. Escrevemos $|P| = k-1$ pelo *comprimento* do caminho P.

Observação 1.16
Caso temos um caminho $P = v_1v_2v_3 \dots v_{2k+1}$ que é M-alternante com v_1 é v_{2k+1} livre, podemos obter um emparelhamento $M \setminus (P \cap M) \cup (P \setminus M)$ de tamanho $|M| - k + (k-1) = |M| + 1$. Notação: Diferença simétrica $M \oplus P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$. A operação $M \oplus P$ é um *aumento* do emparelhamento M. ◊

Teorema 1.17 (Hopcroft e Karp (1973))
Seja M^* um emparelhamento máximo e M um emparelhamento arbitrário. O conjunto $M \oplus M^*$ contém pelo menos $k = |M^*| - |M|$ caminhos M-aumentantes disjuntos (de vértices). Um deles possui comprimento menor que $|V|/k - 1$.
Prova. Considere os componentes de G em relação aos arcos $M \oplus M^*$. Cada vértice possui no máximo grau 2. Portanto, os componentes são vértices livres, caminhos simples ou ciclos. Os caminhos e ciclos possuem alternadamente arestas de M e M^*, logo os ciclos tem comprimento par. Os caminhos de comprimento ímpar são ou M-aumentantes, porque para a solução ótima M^* não existem caminhos aumentantes. Ainda temos

$$|M^* \setminus M| = |M^*| - |M^* \cap M| = |M| - |M^* \cap M| + k = |M \setminus M^*| + k$$

e portanto $M \oplus M^*$ contém k arcos mais de M^* que de M. Isso mostra que existem pelo menos $|M^*| - |M|$ caminhos M-aumentantes, porque somente os caminhos de comprimento ímpar possuem exatamente um arco mais de M^*. Pelo menos um desses caminhos tem que ter um comprimento (em arcos) menor ou igual que $|V|/k - 1$, senão cada um possui pelo menos $|V|/k + 1$ vértices, i.e. eles contém em total mais que $|V|$ vértices. ■

Corolário 1.4 (Berge (1957))
Um emparelhamento é máximo sse não existe um caminho M-aumentante.

Rascunho de um algoritmo:

Algoritmo 1.7 (Emparelhamento máximo)
Entrada Grafo não-direcionado $G = (V, A)$.

Saída Um emparelhamento máximo M.

```
1  M = ∅
2  while (existe um caminho M-aumentante P) do
3    M := M ⊕ P
4  end while
5  return M
```

Problema: como achar caminhos M-aumentantes de forma eficiente?

Observação 1.17
Um caminho M-aumentante começa num vértice livre em V_1 e termina num vértice livre em V_2. Idéia: Começa uma busca por largura com todos vértices livres em V_1. Segue alternadamente arcos livres em M para encontrar vizinhos em V_2 e arcos em M, para encontrar vizinhos em V_1. A busca pára ao encontrar um vértice livre em V_2 ou após de visitar todos os vértices. Ela tem complexidade $O(m + n)$. ◊

Teorema 1.18
O problema do emparelhamento máximo não-ponderado em grafos bi-partidos pode ser resolvido em tempo $O(mn)$.
Prova. Última observação e o fato que o emparelhamento máximo tem tamanho $O(n)$. ■

Observação 1.18
O último teorema é o mesmo que teorema (1.15). ◊

Observação 1.19
Pelo teorema (1.17) sabemos que existem vários caminhos M-alternantes disjuntos (de vértices) e nos podemos aumentar M com todos eles em paralelo. Portanto, estruturamos o algoritmo em fases: cada fase procura um conjunto de caminhos aumentantes disjuntos e aplicá-los para obter um novo emparelhamento. Observe que pelo teorema (1.17) um aumento com o maior conjunto de caminhos M-alternantes disjuntos resolve o problema imediatamente, mas não sabemos como achar esse conjunto de forma eficiente. Portanto, procuramos somente um conjunto maximal de caminhos M-alternantes disjuntos de menor comprimento.
Podemos encontrar um tal conjunto após uma busca em profundidade usando o DAG (grafo direcionado acíclico) definido pela busca por profundidade. (i) Escolhe um vértice livre em V_2. (ii) Segue os predecessores para achar um caminho aumentante. (iii) Coloca todos vértices em uma fila de deleção. (iv) Processa a fila de deleção: Até que a fila esteja vazia, remove um vértice dela. Remove todos arcos adjacentes no DAG. Caso um vértice sucessor após de remoção de um arco possui grau de entrada 0, coloca ele na fila. (v) Repete o procedimento no DAG restante, para achar outro caminho, até não existem mais vértices livres em V_2. A nova busca ainda possui complexidade $O(m)$. ◊

O que ganhamos com essa nova busca? Os seguintes dois lemas dão a resposta:

Lema 1.29
Em cada fase o comprimento de um caminho aumentante mínimo aumenta por pelo menos dois.

Lema 1.30
O algoritmo termina em no máximo $\sqrt{n}$ fases.

Teorema 1.19
O problema do emparelhamento máximo não-ponderado em grafos bi-partidos pode ser resolvido em tempo $O(m\sqrt{n})$.
Prova. Pelas lemas 1.29 e 1.30 e a observação que toda fase pode ser completada em $O(m)$. ■

Usaremos outro lema para provar os dois lemas acima.

Lema 1.31
Seja M um emparelhamento, P um caminho M-aumentante mínimo, e Q um caminho $M \oplus P$-aumentante. Então $|Q| \geq |P| + 2|P \cap Q|$. ($P \cap Q$ denota as arestas em comum entre P e Q.)

Prova. Caso P e Q não possuem vértices em comum, Q é M-aumentante, $P \cap Q = \emptyset$ e a desigualdade é conseqüência da minimalidade de P.
Caso contrário, P e Q possuem um vértice em comum, e logo também uma aresta, senão $M \oplus P \oplus Q$ possui um vértice de grau dois. $P \oplus Q$ consiste em dois caminhos, e eventualmente um coleção de ciclos. Os dois caminhos são M-aumentantes, pelas seguintes observações:

1. O início e termino de P é livre em M, porque P é M-aumentante.

2. O início e termino de Q é livre em M: eles não pertencem a P, porque são livres em $M \oplus P$.

3. Nenhum outro vértice de $P \oplus Q$ é livre em relação a M: P só contém dois vértices livres e Q só contém dois vértices livres em $Q \setminus P$.

4. Temos dois caminhos M-aumentantes, começando com um vértice livre em Q e terminando com um vértice livre em P. O parte do caminho Q em $Q \setminus P$ é M-alternante, porque as arestas livres em $M \oplus P$ são exatamente as arestas livres em M. O caminho Q entra em P e sai de P com arestas livres, porque todo vértice em P está emparelhado em $M \oplus P$. Portanto os dois caminhos em $P \oplus Q$ são M-aumentantes.

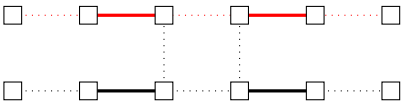
Os dois caminhos M-aumentantes em $P \oplus Q$ tem que ser maiores que $|P|$. Com isso temos $|P \oplus Q| \geq 2|P|$ e

$$|Q| = |P \oplus Q| + 2|P \cap Q| - |P| \geq |P| + 2|P \cap Q|.$$

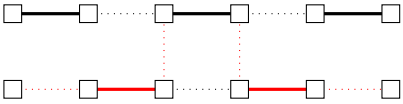
■

Prova. (do lema 1.29). Seja S o conjunto de caminhos M-aumentantes da fase anterior, e P um caminho aumentante. Caso P é disjunto de todos caminhos em S, ele deve ser mais comprido, porque S é um conjunto máximo de caminhos aumentantes. Caso P possui um vértice em comum com algum caminho em S, ele possui também um arco em comum (por quê?) e podemos aplicar lema 1.31. ■

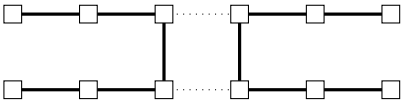
Prova. (do lema 1.30). Seja M^* um emparelhamento máximo e M o emparelhamento obtido após de $\sqrt{n}/2$ fases. O comprimento de qualquer caminho M-aumentante é no mínimo $\sqrt{n}$, pelo lema 1.29. Pelo teorema 1.17 existem pelo menos $|M^*| - |M|$ caminhos M-aumentantes disjuntos de vértices. Mas então $|M^*| - |M| \leq \sqrt{n}$, porque no caso contrário eles possuem mais que n vértices em total. Como o emparelhamento cresce pelo menos um em cada fase, o algoritmo executa no máximo mais $\sqrt{n}$ fases. Portanto, o número total de fases é no máximo $3/2\sqrt{n} = O(\sqrt{n})$. ■



(a) Grafo com emparelhamento M (em negrito) e um caminho M-aumentante P (em vermelho).



(b) O mesmo grafo com emparelhamento $M \oplus P$ (em negrito) e um caminho $M \oplus P$-aumentante Q (em vermelho).



(c) O conjunto de arestas $P \oplus Q$ (em negrito).

Figura 1.23.: Ilustração do lema 1.31.

O algoritmo de Hopcroft-Karp é o melhor algoritmo conhecido para encontrar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos não-ponderados esparsos[5]. Para subclasses de grafos bipartidos existem algoritmos melhores. Por exemplo, existe um algoritmo randomizado para grafos bipartidos regulares com complexidade de tempo esperado $O(n \log n)$ (Goel, Kapralov e Khanna, 2010).

Sobre a implementação A seguir supomos que o conjunto de vértices é $V = [1, n]$ e um grafo $G = (V, A)$ bi-partido com partição $V_1 \dot\cup V_2$. Podemos representar um emparelhamento usando um vetor `mate`, que contém, para cada vértice emparelhado, o índice do vértice vizinho, e 0 caso o vértice é livre.

O núcleo de uma implementação do algoritmo de Hopcroft e Karp é descrito na observação 1.19: ele consiste numa busca por largura até encontrar um ou mais caminhos M-alternantes mínimos e depois uma fase que extrai do DAG definido pela busca um conjunto máximo de caminhos disjuntos (de vértices). A busca por largura começa com todos vértices livres em V_1. Usamos um vetor H para marcar os arcos que fazem parte do DAG definido pela busca

[5] Feder e Motwani (1991) e Feder e Motwani (1995) propuseram um algoritmo em $O(\sqrt{n}m(2 - \log_n m))$ que é melhor em grafos densos.

por largura[6] e um vetor m para marcar os vértices visitados.

```
1  search_paths(M) :=
2    for all v ∈ V do m_v := false
3
4    U_1 := {v ∈ V_1 | v livre}
5    for all u ∈ U_1 do d_u := 0
6
7    do
8      { determina vizinhos em U_2 via arestas livres}
9      U_2 := ∅
10     for all u ∈ U_1 do
11       m_u := true
12       for all uv ∈ A, uv ∉ M do
13         if not m_v then
14           d_v := d_u + 1
15           U_2 := U_2 ∪ v
16         end if
17       end for
18     end for
19
20     { determina vizinhos em U_1 via arestas emparelhadas }
21     found := false        { pelo menos um caminho encontrado? }
22     U_1 := ∅
23     for all u ∈ U_2 do
24       m_u := true
25       if (u livre) then
26         found := true
27       else
28         v := mate[u]
29         if not m_v then
30           d_v := d_u + 1
31           U_1 := U_1 ∪ v
32         end if
33       end for
34     end for
35   while (not found)
36 end
```

Após da busca, podemos extrair um conjunto máximo de caminhos M-alternantes mínimos disjuntos. Enquanto existe um vértice livre em V_2, nos extraimos um

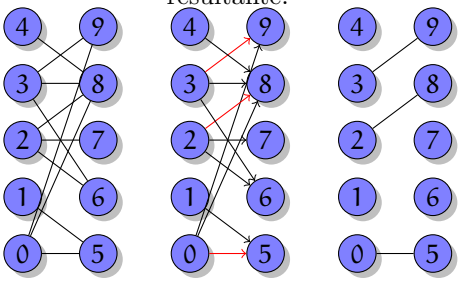
[6] H, porque o DAG se chama *árvore húngara* na literatura.

caminho alternante que termina em v como segue:

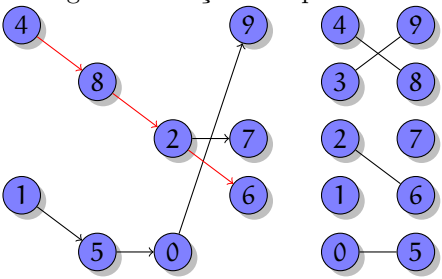
```
1  extract_paths() :=
2    while existe vértice v livre em V2 do
3      aplica um busca em profundidade a partir de v em H
4        (procurando um vértice livre em V1)
5      remove todos vértices visitados durante a busca
6      caso um caminho alternante P foi encontrado: M := M ⊕ P
7    end while
8  end
```

Exemplo 1.7
Segue um exemplo de aplicação do algoritmo de Hopcroft-Karp.

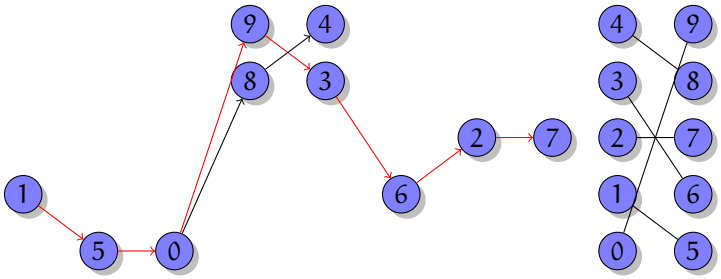
Grafo original, árvore Húngara primeira iteração e emparelhamento resultante:



Árvore Húngara segunda iteração e emparelhamento resultante:



Árvore Húngara terceira iteração e emparelhamento resultante:



◊

Emparelhamentos, coberturas e conjuntos independentes

Proposição 1.6
Seja $G = (S \dot\cup T, A)$ um grafo bipartido e $M \subseteq A$ um emparelhamento em G. Seja R o conjunto de todos vértices livres em S e todos vértices alcançáveis por uma busca na árvore Húngara (i.e. via arestas livres de S para T e arestas do emparelhamento de T para S). Então $(S \setminus R) \cup (T \cap R)$ é uma cobertura de vértices em G.

Prova. Seja $u, v \in A$ uma aresta não coberta. Logo $u \in S \setminus (S \setminus R) = S \cap R$ e $v \in T \setminus (T \cap R) = T \setminus R$. Caso $uv \notin M$, uv é parte da árvore Húngara é $v \in R$, uma contradição. Mas caso $uv \in M$, vu é parte da árvore Húngara e v precede u, logo $v \in R$, novamente uma contradição. ■

A próximo proposição mostra que no caso de um emparelhamento máximo obtemos uma cobertura mínima.

Proposição 1.7
Seja $G = (S \dot\cup T, A)$. Caso M é um emparelhamento máximo o conjunto $(S \setminus R) \cup (T \cap R)$ é uma cobertura mínima.

Prova. O tamanho que qualquer emparelhamento M é um limite inferior para o tamanho de qualquer cobertura, porque uma cobertura tem que conter pelo menos um vértice da cada aresta emparelhada. Logo é suficiente demonstrar que $|(S \setminus R) \cup (T \cap R)| = |M|$.
Temos $|(S \setminus R) \cup (T \cap R)| = |S \setminus R| + |T \cap R|$ porque S e T são disjuntos. Vamos demonstrar que $|T \cap R| = v$ implica $|S \setminus R| = |M| - v$.
Supõe $|T \cap R| = v$. Como M é máximo não existe caminho M-aumentante, e logo $T \cap R$ contém somente vértices emparelhados. Por isso o número de vértices emparelhados em $S \cap R$ também é v. Além disso $S \cap R$ contém todos $|S| - |M|$ vértices livres em S. Logo $|S \setminus R| = |S| - (|S| - |M|) - v = |M| - v$. ■

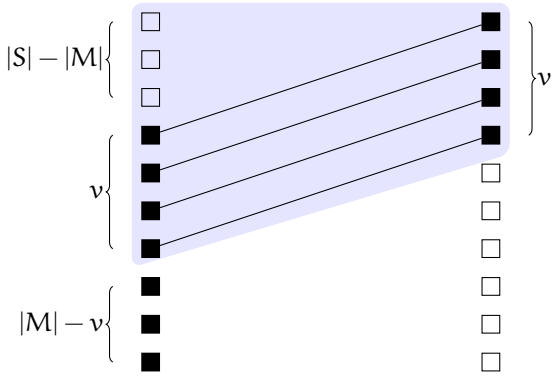


Figura 1.24.: Ilustração da prova da proposição 1.7.

Observação 1.20
O complemento $V \setminus C$ de uma cobertura C é um conjunto independente (por quê?). Logo um emparelhamento M que define um conjunto R de acordo com a proposição (1.6) corresponde com um conjunto independente $(S \cap R) \cup (T \setminus R)$, e caso M é máximo, o conjunto independente também. ◊

Solução ponderada em grafos bi-partidos Dado um grafo $G = (S \dot\cup T, A)$ bipartido com pesos $c : A \to \mathbb{Q}_+$ queremos achar um emparelhamento de maior peso. Escrevemos $V = S \cup T$ para o conjunto de todos vértices em G.

Observação 1.21
O caso ponderado pode ser restrito para emparelhamentos perfeitos: caso S e T possuem cardinalidade diferente, podemos adicionar vértices, e depois completar todo grafo com arestas de custo 0. O problema de encontrar um emparelhamento perfeito máximo (ou mínimo) em grafos ponderados é conhecido pelo nome "problema de alocação" (ingl. assignment problem). ◊

Observação 1.22
A redução do teorema 1.15 para um problema de fluxo máximo não se aplica no caso ponderado. Mas, com a simplificação da observação 1.21, podemos reduzir o problema no caso ponderado para um problema de fluxo de menor custo: a capacidade de todas arestas é 1, e o custo de transportação são os pesos das arestas. Como o emparelhamento é perfeito, procuramos um fluxo de valor $|V|/2$, de menor custo. ◊

O dual do problema 1.19 é a motivação para

Definição 1.4
Um *rotulamento* é uma atribuição $y : V \to \mathbb{R}_+$. Ele é *viável* caso $y_u + y_v \geq c_e$ para todas arestas $e = (u, v)$. (Um rotulamento viável é c-*cobertura de vértices*.) Uma aresta é *apertada* (ingl. tight) caso $y_u + y_v = c_e$. O subgrafo de arestas apertadas é $G_y = (V, A', c)$ com $A' = \{a \in A \mid a \text{ apertada em } y\}$.

Pelo teorema forte de dualidade e o fato que a relaxação linear dos sistemas acima possui uma solução integral (ver observação 1.14) temos

Teorema 1.20 (Egerváry (1931))
Para um grafo bi-partido $G = (S \dot\cup T, A, c)$ com pesos não-negativos $c : A \to \mathbb{Q}_+$ nas arestas, o maior peso de um emparelhamento perfeito é igual ao peso da menor c-cobertura de vértices.

O método húngaro Aplicando um caminho M-aumentante $P = (v_1 v_2 \dots v_{2n+1})$ produz um emparelhamento de peso $c(M) + \sum_{i \text{ ímpar}} c_{v_i v_{i+1}} - \sum_{i \text{ par}} c_{v_i v_{i+1}}$. Isso motiva a definição de uma árvore húngara ponderada. Para um emparelhamento M, seja H_M o grafo direcionado com as arestas $e \in M$ orientadas de T para S com peso $l_e := w_e$, e com as restantes arestas $a \in A \setminus M$ orientadas de S para T com peso $l_a := -w_a$. Com isso a aplicação do caminho M-aumentante P produz um emparelhamento de peso $c(M) - l(P)$ em que $l(P) = \sum_{1 \leq i \leq 2n} l_{v_i v_{i+1}}$ é o comprimento do caminho P.
Com isso podemos modificar o algoritmo para emparelhamentos máximos para

Algoritmo 1.8 (Emparelhamento de peso máximo)
Entrada Um grafo não-direcionado ponderado $G = (V, E, c)$.

Saída Um emparelhamento de maior peso $c(M)$.

```
1  M = ∅
2  while (existe um caminho M-aumentante P) do
3    encontra o caminho M-aumentante mínimo P em H_M
4    caso l(P) ≥ 0: return M;
5    M := M ⊕ P
6  end while
7  return M
```

Chamaremos um emparelhamento M *extremo* caso ele possui o maior peso entre todos emparelhamentos de tamanho $|M|$.

Observação 1.23
O grafo H_M de um emparelhamento extremo M não possui ciclo (par) negativo. Isso seria uma contradição com a maximalidade de M. Portanto

podemos encontrar o caminho mínimo no passo 3 do algoritmo usando o algoritmo de Bellman-Ford em tempo $O(mn)$. Com isso a complexidade do algoritmo é $O(mn^2)$. ◊

Observação 1.24
Lembrando Bellman-Ford: Seja $d_k(t)$ a distância mínima entre s e t com um caminho usando no máximo k arcos ou ∞ caso tal caminho não existe. Temos

$$d_{k+1}(t) = \min\{d_k(t), \min_{(u,t)\in A} d_k(u) + l(u,t)\}$$

com $d_0(t) = 0$ caso t é um vértice livre em S e $d_0(t) = \infty$ caso contrário. O algoritmo se aplica igualmente para as distâncias de um conjunto de vértices, como o conjunto de vértices livres em S. A atualização de k para $k+1$ é possível em $O(m)$ e como $k < n$ o algoritmo possui complexidade $O(nm)$. ◊

Teorema 1.21
Cada emparelhamento encontrado no algoritmo 1.8 é extremo.

Prova. Por indução sobre $|M|$. Para $M = \emptyset$ o teorema é correto. Seja M um emparelhamento extremo, P o caminho aumentante encontrado pelo algoritmo 1.8 e N um emparelhamento de tamanho $|M|+1$ arbitrário. Como $|N| > |M|$, $M \cup N$ contém uma componente que é um caminho Q M-aumentante (por um argumento similar com aquele da prova do teorema de Hopcroft-Karp 1.17). Sabemos $l(Q) \geq l(P)$ pela minimalidade de P. $N \oplus Q$ é um emparelhamento de cardinalidade $|M|$ (Q é um caminho com arestas em N e M com uma aresta em N a mais), logo $c(N \oplus Q) \leq c(M)$. Com isso temos

$$c(N) = c(N \oplus Q) - l(Q) \leq c(M) - l(P) = c(M \oplus P)$$

(observe que o comprimento $l(Q)$ é definido no emparelhamento M). ■

Proposição 1.8
Caso não existe caminho M-aumentante com comprimento negativo no algoritmo 1.8, M é máximo.

Prova. Supõe que existe um emparelhamento N com $c(N) > c(M)$. Logo $|N| > |M|$ porque M é possui o maior peso entre todos emparelhamentos de cardinalidade no máximo $|M|$. Pelo teorema de Hopcroft-Karp, existem $|N| - |M|$ caminhos M-aumentantes disjuntos de vértices em $N \oplus M$. Nenhum deles tem comprimento negativo, pelo critério de parada do algoritmo. Portanto $c(N) \leq c(M)$, uma contradição. ■

Fato 1.1
É possível encontrar o caminho mínimo no passo 3 em tempo $O(m + n \log n)$ usando uma transformação para distâncias positivas e aplicando o algoritmo de Dijkstra. Com isso um algoritmo em tempo $O(n(m + n \log n))$ é possível.

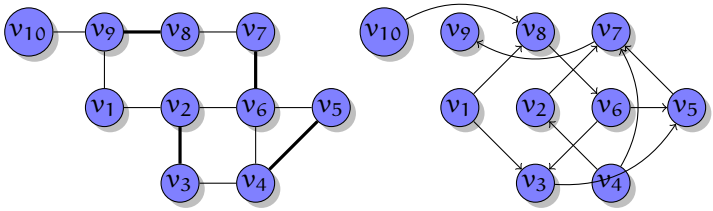


Figura 1.25.: Grafo com emparelhamento e grafo auxiliar.

Tabela 1.4.: Resumo emparelhamentos

	Cardinalidade	Ponderado
Bi-partido	$O(n\sqrt{mn/\log n})$ (Alt et al., 1991) $O(m\sqrt{n}\frac{\log(n^2/m)}{\log n})$ (Feder e Motwani, 1995)	$O(nm + n^2 \log n)$ (Kuhn, 1955; Munkres, 1957)
Geral	$O(m\sqrt{n}\frac{\log(n^2/m)}{\log n})$ (Goldberg e Karzanov, 2004; Fremuth-Paeger e Jungnickel, 2003)	$O(n^3)$ (Edmonds, 1965) $O(mn + n^2 \log n)$ (Gabow, 1990)

1.5.3. Emparelhamentos em grafos não-bipartidos

O caso não-ponderado Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$ e um emparelhamento M, podemos simplificar a árvore húngara para um grafo direcionado $D = (V, A)$ com $A = \{(u, v) \mid \exists x \in V : ux \in E, xv \in M\}$. Qualquer passeio M-alternante entre dois vértices livres em G corresponde com um caminho M-alternante em D.
O problema no caso não-bipartido são laços ímpares. No caso bi-partido, todo laço é par e pode ser eliminado sem consequências: de fato o caminho M-alternante mais curto não possui laço. No caso não bi-partido não todo caminho no grafo auxiliar corresponde com um caminho M-alternante no grafo original. O caminho $v_1v_3v_5v_7v_9$ corresponde com o caminho M-alternante $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_{10}$, mas o caminho $v_1v_8c_6v_5v_7v_9$ que corresponde com o passeio $v_1v_9v_8v_7v_6v_4v_5v_6v_7v_8v_0v_{10}$ não é um caminho M-alternante que aumento o emparelhamento. O problema é que o laço ímpar $v_6v_4v_5v_6$ não pode ser eliminado sem consequências.

1.5.4. Notas

Duan, Pettie e Su (2011) apresentam técnicas de aproximação para emparelhamentos.

1.5.5. Exercícios

Exercício 1.7
É possível somar uma constante $c \in \mathbb{R}$ para todos custos de uma instância do EPM ou EPPM, mantendo a otimalidade da solução?

Exercício 1.8
Prove a proposição 1.5.

2. Tabelas hash

Em *hashing* nosso interesse é uma estrutura de dados H para gerenciar um conjunto de chaves sobre um universo U e que oferece as operações de um *dicionário*:

- Inserção de uma chave $c \in U$: insert(c,H)
- Deleção de uma chave $c \in U$: delete(c,H)
- Teste da pertinência: Chave $c \in H$? lookup(c,H)

Uma característica do problema é que tamanho $|U|$ do universo de chaves possíveis pode ser grande, por exemplo o conjunto de todos strings ou todos números inteiros. Portanto usar a chave como índice de um vetor de booleano não é uma opção. Uma tabela hash é um alternativa para outros estruturas de dados de dicionários, p.ex. árvores. O princípio de tabelas hash: aloca uma tabela de tamanho m e usa uma *função hash* $h : U \to [m]$ para calcular a posição de uma chave na tabela.
Como o tamanho da tabela hash é menor que o número de chaves possíveis, existem chaves c_1, c_2 com $h(c_1) = h(c_2)$, que geram *colisões*. Logo uma tabela hash precisa definir um método de *resolução de colisões*. Uma solução é *Hashing perfeito*: escolhe uma função hash, que para um dado conjunto de chaves não tem colisões. Isso é possível se o conjunto de chaves é conhecido e estático.

2.1. Hashing com listas encadeadas

Seja $h : U \to [m]$ uma função hash. Mantemos uma coleção de m listas $l_0, \ldots, l_{m-1}$ tal que a lista l_i contém as chaves c com *valor hash* $h(c) = i$. Supondo que a avaliação de h é possível em $O(1)$, a inserção custa $O(1)$, e o teste é proporcional ao tamanho da lista.
Para obter uma distribuição razoável das chaves nas listas, supomos que h é uma função hash *simples* e *uniforme*:

$$\Pr(h(c) = i) = 1/m. \tag{2.1}$$

Seja $n_i := |l_i|$ o tamanho da lista i e $c_{ji} := \Pr(h(j) = i)$ a variável aleatória que indica se chave j pertence a lista i. Temos $n_i = \sum_{1 \le j \le n} c_{ji}$ e com isso

$$E[n_i] = E[\sum_{1 \le j \le n} c_{ji}] = \sum_{1 \le j \le n} E[c_{ji}] = \sum_{1 \le j \le n} \Pr(h(c_j) = i) = n/m.$$

O valor $\alpha := n/m$ é o *fator de ocupação* da tabela hash.

```
1  insert(c,H) :=
2    insert(c,l_h(c))
3
4  lookup(c,H) :=
5    lookup(c,l_h(c))
6
7  delete(c,H) :=
8    delete(c,l_h(c))
```

Teorema 2.1
Uma busca sem sucesso precisa tempo esperado $\Theta(1 + \alpha)$.

Prova. A chave c tem a probabilidade $1/m$ de ter um valor hash i. O tamanho esperado da lista i é α. Uma busca sem sucesso nessa lista precisa tempo $\Theta(\alpha)$. Junto com a avaliação da função hash em $\Theta(1)$, obtemos tempo esperado total $\Theta(1 + \alpha)$. ■

Teorema 2.2
Uma busca com sucesso precisa tempo esperado $\Theta(1 + \alpha)$.

Prova. Supomos que a chave c é uma das chaves na tabela com probabilidade uniforme. Então, a probabilidade de pertencer a lista i (ter valor hash i) é n_i/n. Uma busca com sucesso toma tempo $\Theta(1)$ para avaliação da função hash, e mais um número de operações proporcional à posição p da chave na sua lista. Com isso obtemos tempo esperado $\Theta(1 + E[p])$.
Para determinar a posição esperada na lista, $E[p]$, seja $c_1, \ldots, c_n$ a sequência na qual as chaves foram inseridas. Supondo que inserimos as chaves no inicio da lista, $E[p]$ é um mais que o número de chaves inseridos depois de c na mesma lista.
Seja X_{ij} um variável aleatória que indica se chaves c_i e c_j tem o mesmo valor hash. $E[X_{ij}] = \Pr(h(c_i) = h(c_j)) = \sum_{1 \le k \le m} \Pr(h(c_i) = k) \Pr(h(c_j) = k) = 1/m$. Seja p_i a posição da chave c_i na sua lista. Temos

$$E[p_i] = E[1 + \sum_{j:j>i} X_{ij}] = 1 + \sum_{j:j>i} E[X_{ij}] = 1 + (n - i)/m$$

e para uma chave aleatória c

$$\begin{aligned} E[p] &= \sum_{1 \le i \le n} 1/n \, E[p_i] = \sum_{1 \le i \le n} 1/n(1 + (n-i)/m) \\ &= 1 + n/m - (n+1)/(2m) = 1 + \alpha/2 - \alpha/(2n). \end{aligned}$$

Portanto, o tempo esperado de uma busca com sucesso é

$$\Theta(1 + E[p]) = \Theta(2 + \alpha/2 - \alpha/2n) = \Theta(1 + \alpha).$$

■

Seleção de uma função hash Para implementar uma tabela hash, temos que escolher uma função hash, que satisfaz (2.1). Para facilitar isso, supomos que o universo de chaves é um conjunto $U = [u]$ de números inteiros. (Para tratar outros tipos de chaves, costuma-se convertê-los para números inteiros.) Se cada chave ocorre com a mesma probabilidade, $h(i) = i \mod m$ é uma função hash simples e uniforme. Essa abordagem é conhecida como *método de divisão*. O problema com essa função na prática é que não conhecemos a distribuição de chaves, e ela provavelmente não é uniforme. Por exemplo, se m é par, o valor hash de chaves pares é par, e de chaves ímpares é ímpar, e se $m = 2^k$ o valor hash consiste nos primeiros k bits. Uma escolha que funciona na prática é um número primo "suficientemente" distante de uma potência de 2.
O *método de multiplicação* define

$$h(c) = \lfloor m\{Ac\} \rfloor .$$

O método funciona para qualquer valor de m, mas depende de uma escolha adequada de $A \in \mathbb{R}$. Knuth propôs $A \approx (\sqrt{5} - 1)/2$.

Hashing universal Outra idéia: Para qualquer função hash h fixa, sempre existe um conjunto de chaves, tal que essa função hash gera muitas colisões. (Em particular, um "adversário" que conhece a função hash pode escolher chaves $c \in h^{-1}(i)$ para qualquer posição $i \in [m]$, tal que $h(c) = i$ é constante. Para evitar isso podemos escolher uma função hash aleatória de uma família de funções hash.
Uma família $\mathcal{H}$ de funções hash $U \to [m]$ é *universal* se

$$|\{h \in \mathcal{H} \mid h(c_1) = h(c_2)\}| = |H|/m$$

ou equivalente

$$\Pr(h(c_1) = h(c_2)) = 1/m$$

para qualquer par de chaves c_1, c_2.

Teorema 2.3
Se escolhemos uma função hash $h \in \mathcal{H}$ uniformemente, para uma chave arbitrária c o tamanho esperado de $l_{h(c)}$ é

- α, caso $c \notin H$, e
- $1 + \alpha$, caso $c \in H$.

Prova. Para chaves c_1, c_2 seja $X_{ij} = [h(c_1) = h(c_2)]$ e temos

$$E[X_{ij}] = \Pr(X_{ij} = 1) = \Pr(h(c_1) = h(c_2)) = 1/m$$

pela universalidade de $\mathcal{H}$. Para uma chave fixa c seja Y_c o número de colisões.

$$E[Y_c] = E\left[\sum_{\substack{c' \in H \\ c' \neq c}} X_{cc'}\right] = \sum_{\substack{c' \in H \\ c' \neq c}} E[X_{cc'}] \leq \sum_{\substack{c' \in H \\ c' \neq c}} 1/m.$$

Para uma chave $c \notin H$, o tamanho da lista é Y_c, e portanto de tamanho esperado $E[Y_c] \leq n/m = \alpha$. Caso $c \in H$, o tamanho da lista é $1 + Y_c$ e com $E[Y_c] = (n-1)/m$ esperadamente

$$1 + (n-1)/m = 1 + \alpha - 1/m < 1 + \alpha.$$

■

Um exemplo de um conjunto de funções hash universais: Seja $c = (c_0, \ldots, c_r)_m$ uma chave na base m, escolhe $a = (a_0, \ldots, a_r)_m$ randomicamente e define

$$h_a = \sum_{0 \leq i \leq r} c_i a_i \mod m.$$

Hashing perfeito Hashing é *perfeito* sem colisões. Isso podemos garantir somente caso conheçemos a chaves a serem inseridos na tabela. Para uma função aleatória de uma família universal de funções hash para uma tabela hash de tamanho m, o número esperado de colisões é $E[\sum_{i \neq j} X_{ij}] = \sum_{i \neq j} E[X_{ij}] \leq n^2/m$. Portanto, caso esolhemos uma tabela de tamanho $m > n^2$ o número esperado de colisões é menos que um. Em particular, para $m > cn^2$ com $c > 1$ a probabilidade de uma colisão é $\Pr(\sum_{i \neq j} X_{ij} \geq 1) \leq E[\sum_{i \neq j} X_{ij}] \leq n^2/m < 1/c$ onde a primeira desigualdade segue da desigualdade de Markov.

2.2. Hashing com endereçamento aberto

Uma abordagem para resolução de colisões, chamada *endereçamento aberto*, é escolher uma outra posição para armazenar uma chave, caso $h(c)$ é ocupada. Uma estratégia para conseguir isso é procurar uma posição livre numa permutação de todos índices restantes. Assim garantimos que um insert tem sucesso enquanto ainda existe uma posição livre na tabela. Uma função hash $h(c, i)$ com dois argumentos, tal que $h(c, 1), \ldots, h(c, m)$ é uma permutação de $[m]$, representa essa estratégia.

```
1  insert(c,H) :=
2    for i in [m]
3      if H[h(c,i)] = free
4        H[h(c,i)]=c
5        return
6
7  lookup(c,H) :=
8    for i in [m]
9      if H[h(c,i)] = free
10       return false
11     if H[h(c,i)] = c
12       return true
13   return false
```

A função $h(c, i)$ é *uniforme*, se a probabilidade de uma chave randômica ter associada uma dada permutação é $1/m!$. A seguir supomos que h é uniforme.

Teorema 2.4
As funções lookup e insert precisam no máximo $1/(1-\alpha)$ testes caso a chave não está na tabela.

Prova. Seja X o número de testes até encontrar uma posição livre. Temos

$$E[X] = \sum_{i\geq 1} i \Pr(X = i) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq i} \Pr(X = i) = \sum_{i\geq 1} \Pr(X \geq i).$$

Com T_i o evento que o teste i ocorre e a posição i é ocupada, podemos escrever

$$\Pr(X \geq i) = \Pr(T_1 \cap \cdots \cap T_{i-1}) = \Pr(T_1)\Pr(T_2|T_1)\Pr(T_3|T_1, T_2)\cdots\Pr(T_{i-1}|T_1, \ldots, T_{i-2}).$$

Agora $\Pr(T_1) = n/m$, e como h é uniforme $\Pr(T_2|T_1) = n - 1/(m-1)$ e em geral

$$\Pr(T_k|T_1, \ldots T_{k-1}) = (n-k+1)/(m-k+1) \leq n/m = \alpha.$$

Portanto $\Pr(X \geq i) \leq \alpha^{i-1}$ e

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} \Pr(X \geq i) \leq \sum_{i \geq 1} \alpha^{i-1} = \sum_{i \geq 0} \alpha^i = 1/(1-\alpha).$$

■

Lema 2.1
Para $i < j$, temos $H_i - H_j \leq \ln(i) - \ln(j)$.

Prova.

$$H_i - H_j \leq \int_{j+1}^{i+1} \frac{1}{x-1} dx = \ln(i) - \ln(j)$$

■

Teorema 2.5
Caso $\alpha < 1$ a função lookup precisa esperadamente $1/\alpha \ln 1/(1-\alpha)$ testes caso a chave esteja na tabela, e cada chave tem a mesma probabilidade de ser procurada.

Prova. Seja c a i-gésima chave inserida. No momento de inserção temos $\alpha = (i-1)/m$ e o número esperado de testes T até encontrar a posição livre foi $1/(1-(i-1)/m) = m/(m-(i-1))$, e portanto o número esperado de testes até encontrar uma chave arbitrária é

$$E[T] = 1/n \sum_{1 \leq i \leq n} m/(m-(i-1)) = 1/\alpha \sum_{0 \leq i < n} 1/(m-i) = 1/\alpha(H_m - H_{m-n})$$

e com $H_m - H_{m-n} \leq \ln(m) - \ln(m-n)$ temos

$$E[T] = 1/\alpha(H_m - H_{m-n}) < 1/\alpha(\ln(m) - \ln(m-n)) = 1/\alpha \ln(1/(1-\alpha)).$$

■

Remover elementos de uma tabela hash com endereçamento aberto é mais difícil, porque a busca para um elemento termina ao encontrar uma posição livre. Para garantir a corretude de lookup, temos que marcar posições como "removidas" e continuar a busca nessas posições. Infelizmente, nesse caso, as garantias da complexidade não mantem-se – após uma série de deleções e inserções toda posição livre será marcada como "removida" tal que delete e lookup precisam n passos. Portanto o endereçamento aberto é favorável somente se temos poucas deleções.

Funções hash para endereçamento aberto

- Linear: $h(c, i) = h(c) + i \mod m$
- Quadrática: $h(c, i) = h(c) + c_1 i + c_2 i^2 \mod m$
- Hashing duplo: $h(c, i) = h_1(c) + i h_2(c) \mod m$

Nenhuma das funções é uniforme, mas o hashing duplo mostra um bom desempenho na prática.

2.3. Cuco hashing

Cuco hashing é outra abordagem que procura posições alternativas na tabela em caso de colisões, com o objetivo de garantir um tempo de acesso constante no pior caso. Para conseguir isso, usamos duas funções hash h_1 e h_2, e inserimos uma chave em uma das duas posições $h_1(c)$ ou $h_2(c)$. Desta forma a busca e a deleção possuem complexidade constante $O(1)$:

```
1  lookup(c,H) :=
2    if H[h1(c)] = c or H[h2(c)] = c
3      return true
4    return false
5
6  delete(c,H) :=
7    if H[h1(c)] = c
8      H[h1(c)] := free
9    if H[h2(c)] = c
10     H[h2(c)] := free
```

Inserir uma chave é simples, caso uma das posições alternativas é livre. No caso contrário, a solução do cuco hashing é comportar-se como um cuco com ovos de outras aves que jogá-los fora do seu "ninho": "insert" ocupa a posição de uma das duas chaves. A chave "jogada fora" será inserida novamente na tabela. Caso a posição alternativa dessa chave é livre, a inserção termina. Caso contrário, o processo se repete. Esse procedimento termina após uma série de reinserções ou entra num laço infinito. Nesse último caso temos que realocar todas chaves com novas funções hash.

```
1  insert(c,H) :=
2    if H[h1(c)] = c or H[h2(c)] = c
3      return
4    p := h1(c)
5    do n vezes
```

```
6       if H[p] = free
7         H[p] := c
8         return
9       swap(c,H[p])
10      { escolhe a outra posição da chave atual }
11      if p = h1(c)
12        p := h2(c)
13      else
14        p := h1(c)
15    rehash(H)
16    insert(c,H)
```

Uma maneira de visualizar uma tabela hash com cuco hashing, é usar o *grafo cuco*: caso foram inseridas as chaves $c_1, \ldots, c_n$ na tabela nas posições $p_1, \ldots, p_n$, o grafo é $G = (V, A)$, com $V = [m]$ é $(p_i, h_2(c_i)) \in A$ caso $h_1(c_i) = p_i$ e $(p_i, h_1(c_i)) \in A$ caso $h_2(c_i) = p_i$, i.e., os arcos apontam para a posição alternativa. O grafo cuco é um grafo direcionado e eventualmente possui ciclos. Uma característica do grafo cuco é que uma posição p é eventualmente analisada na inserção de uma chave c somente se existe um caminho de $h_1(c)$ ou $h_2(c)$ para p. Para a analise é suficiente considerar o grafo cuco não-direcionado.

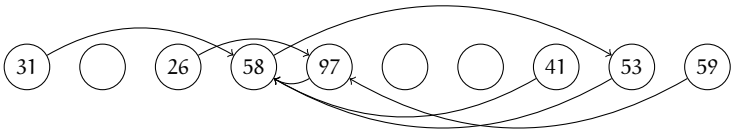
Exemplo 2.1
Para chaves de dois dígitos c_1c_2 seja $h_1(c) = 3c_1 + c_2 \mod m$ e $h_2(c) = 4c_1 + c_2$. Para $m = 10$ obtemos para uma sequencia aleatória de chaves

c	31	41	59	26	53	58	97
$h_1(c)$	0	3	4	2	8	3	4
$h_2(c)$	3	7	9	4	3	8	3

e a seguinte sequencia de tabelas hash

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
										Inicial
31										Inserção 31
31			41							Inserção 41
31			41	59						Inserção 59
31		26	41	59						Inserção 26
31		26	41	59				53		Inserção 53
31		26	58	59			41	53		Inserção 58
31		26	58	97			41	53	59	Inserção 59

O grafo cuco correspondente é



◊

Lema 2.2
Para posições i e j e um $c > 1$ tal que $m \geq 2cn$, a probabilidade de existir um caminho mínimo de i para j de comprimento $d \geq 1$ é no máximo c^{-d}/m.

Prova. Observe que a probabilidade de um item c ter posições i e j como alternativas é no máximo $\Pr(h_1(c) = i, h_2(c) = j) + \Pr(h_1(c) = j, h_2(c) = i) = 2/m^2$. Portanto a probabilidade de pelo menos uma das n chaves ter posições alternativas i e j é no máximo $2n/mš = c^{-1}/m$.
A prova do lema é por indução sobre d. Para $d = 1$ a afirmação está correto pela observação acima. Para $d > 1$ existe um caminho mínimo de comprimento $d - 1$ de i para um k. A probabilidade disso é no máximo $c^{-(d-1)}/m$ e a probabilidade de existir um elemento com posições alternativas k e j no máximo c^{-1}/m. Portanto, para um k fixo, a probabilidade existir um caminho de comprimento d é no máximo c^{-d}/m^2 e considerando todas posições k possíveis no máximo c^{-d}/m. ■
Com isso a probabilidade de existir um caminho entre duas chaves i e j, é igual a probabilidade de existir um caminho começando em $h_1(i)$ ou $h_2(i)$ e terminando em $h_1(j)$ ou $h_2(j)$, que é no máximo $4\sum_{i\geq 1} c^{-i}/m \leq 4/m(c - 1) = O(1/m)$. Logo o número esperado de itens visitados numa inserção é $4n/m(c - 1) = O(1)$, caso não é necessário reconstruir a tabela hash.

2.4. Filtros de Bloom

Um filtro de Bloom armazena um conjunto de n chaves, com as seguintes restrições:

- Não é mais possível remover elementos.
- É possível que o teste de pertinência tem sucesso, sem o elemento fazer parte do conjunto (“false positive”).

Um filtro de Bloom consiste em m bits B_i, $1 \leq i \leq m$, e usa k funções hash $h_1, \ldots, h_k$.

```
1  insert(c,B) :=
2    for i in 1...k
3      b_{h_i(c)} := 1
4    end for
5
6  lookup(c,B) :=
7    for i in 1...k
8      if b_{h_i(c)} = 0
9        return false
10   return true
```

Após de inserir n chaves, um dado bit é ainda 0 com probabilidade

$$p' = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kn} = \left(1 - \frac{kn/m}{kn}\right)^{kn} \approx e^{-kn/m}$$

que é igual ao valor esperado da fração de bits não setados[1]. Sendo ρ a fração de bits não setados realmente, a probabilidade de erradamente classificar um elemento como membro do conjunto é

$$(1-\rho)^k \approx (1-p')^k \approx \left(1 - e^{-kn/m}\right)^k$$

porque ρ é com alta probabilidade perto do seu valor esperado (Broder e Mitzenmacher, 2003). Broder e Mitzenmacher (2003) também mostram que o número ótimo k de funções hash para dados valores de n, m é $m/n \ln 2$ e com isso temos um erro de classificação $\approx (1/2)^k$.
Aplicações:

1. Hifenação: Manter uma tabela de palavras com hifenação excepcional (que não pode ser determinado pelas regras).

2. Comunicação efetiva de conjuntos, p.ex. seleção em bancos de dados distribuídas. Para calcular um join de dois bancos de dados A, B, primeiramente A filtra os elementos, manda um filtro de Bloom S_A para B e depois B executa o join baseado em S_A. Para eliminação de eventuais elementos classificados erradamente, B manda os resultados para A e A filtra os elementos errados.

[1] Lembrando que $e^x \geq (1 + x/n)^n$ para $n > 0$.

Tabela 2.1.: Complexidade das operações em tabelas hash. Complexidades em negrito são amortizados.

	insert	lookup	delete
Listas encadeadas	$\Theta(1)$	$\Theta(1+\alpha)$	$\Theta(1+\alpha)$
Endereçamento aberto	$O(1/(1-\alpha))$	$O(1/(1-\alpha))$	-
(com/sem sucesso)	$O(1/\alpha \ln 1/(1-\alpha))$	$O(1/\alpha \ln 1/(1-\alpha))$	-
Cuco	$\Theta(\mathbf{1})$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$

3. Algoritmos de aproximação

Para vários problemas não conhecemos um algoritmo eficiente. Para problemas NP-completos, em particular, uma solução eficiente é pouco provável. Um *algoritmo de aproximação* calcula uma solução aproximada para um problema de otimização. Diferente de uma heurística, o algoritmo *garante* a qualidade da aproximação no pior caso. Dado um problema e um algoritmo de aproximação A, escrevemos $A(x) = y$ para a solução aproximada da instância x, $\varphi(x, y)$ para o valor dessa solução, y^* para a solução ótima e $\mathrm{OPT}(x) = \varphi(x, y^*)$ para o valor da solução ótima.

3.1. Problemas, classes e reduções

Definição 3.1
Um *problema de otimização* $\Pi = (\mathcal{P}, \varphi, \mathrm{opt})$ é uma relação binária $\mathcal{P} \subseteq I \times S$ com instâncias $x \in I$ e soluções $y \in S$, junto com

- uma função de otimização (função de objetivo) $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Q}$).
- um objetivo: Encontrar mínimo ou máximo

$$\mathrm{OPT}(x) = \mathrm{opt}\{\varphi(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{P}\}$$

  junto com uma solução y^* tal que $f(x, y^*) = \mathrm{OPT}(x)$.

O par $(x, y) \in \mathcal{P}$ caso y é uma solução para x.

Uma instância x de um problema de otimização possui soluções $S(x) = \{y \mid (x, y) \in \mathcal{P}\}$.

Convenção 3.1
Escrevemos um problema de otimização na forma

NOME

Instância x

Solução y

Objetivo Minimiza ou maximiza $\varphi(x, y)$.

Com um dado problema de otimização correspondem três problemas:

- Construção: Dado x, encontra a solução ótima y^* e seu valor $\mathrm{OPT}(x)$.
- Avaliação: Dado x, encontra valor ótimo $\mathrm{OPT}(x)$.
- Decisão: Dado x e k, decide se $\mathrm{OPT}(x) \geq k$ (maximização) ou $\mathrm{OPT}(x) \leq k$ (minimização).

Definição 3.2
Uma relação binária R é *polinomialmente limitada* se

$$\exists p \in \mathsf{poly} : \forall (x, y) \in R : |y| \leq p(|x|).$$

Definição 3.3 (Classes de complexidade)
A classe PO consiste dos problemas de otimização tal que existe um algoritmo polinomial A com $\varphi(x, A(x)) = \mathrm{OPT}(x)$ para $x \in I$.
A classe NPO consiste dos problemas de otimização tal que

(i) As instâncias $x \in I$ são reconhecíveis em tempo polinomial.

(ii) A relação $\mathcal{P}$ é polinomialmente limitada.

(iii) Para y arbitrário, polinomialmente limitado: $(x, y) \in \mathcal{P}$ é decidível em tempo polinomial.

(iv) φ é computável em tempo polinomial.

Definição 3.4
Uma *redução preservando a aproximação* entre dois problemas de minimização Π_1 e Π_2 consiste num par de funções f e g (computáveis em tempo polinomial) tal que para instância x_1 de Π_1, $x_2 := f(x_1)$ é instância de Π_2 com

$$\mathrm{OPT}_{\Pi_2}(x_2) \leq \mathrm{OPT}_{\Pi_1}(x_1) \tag{3.1}$$

e para uma solução y_2 de Π_2 temos uma solução $y_1 := g(x_1, y_2)$ de Π_1 com

$$\varphi_{\Pi_1}(x_1, y_1) \leq \varphi_{\Pi_2}(x_2, y_2) \tag{3.2}$$

Uma redução preservando a aproximação fornece uma α-aproximação para Π_1 dada uma α-aproximação para Π_2, porque

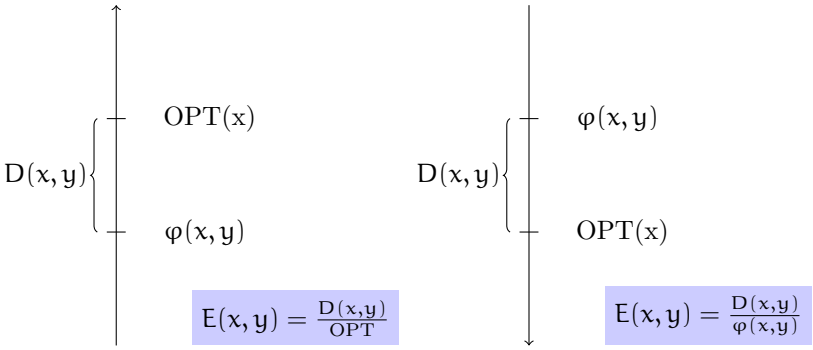
$$\varphi_{\Pi_1}(x_1, y_1) \leq \varphi_{\Pi_2}(x_2, y_2) \leq \alpha \mathrm{OPT}_{\Pi_2}(x_2) \leq \alpha \mathrm{OPT}_{\Pi_1}(x_1).$$

Observe que essa definição é vale somente para problemas de minimização. A definição no caso de maximização é semelhante.

3.2. Medidas de qualidade

Uma *aproximação absoluta* garante que $D(x, y) = |OPT(x) - \varphi(x, y)| \leq D$ para uma constante D e todo x, enquanto uma *aproximação relativa* garante que o *erro relativo* $E(x, y) = D(x, y)/\max\{OPT(x), \varphi(x, y)\} \leq \epsilon \leq 1$ todos x. Um algoritmo que consegue um aproximação com constante ϵ também se chama ϵ-aproximativo. Tais algoritmos fornecem uma solução que difere no máximo um fator constante da solução ótima. A classe de problemas de otimização que permitem uma ϵ-aproximação em tempo polinomial para uma constante ϵ se chama APX.
Uma definição alternativa é a *taxa de aproximação* $R(x, y) = 1/(1 - E(x, y)) \geq 1$. Um algoritmo com taxa de aproximação r se chama r-aproximativo. (Não tem perigo de confusão com o erro relativo, porque $r \geq 1$.)

Aproximação relativa



Exemplo 3.1
Coloração de grafos planares e a problema de determinar a árvore geradora e a árvore Steiner de grau mínimo (Fürer e Raghavachari, 1994) permitem uma aproximação absoluta, mas não o problema da mochila.
Os problemas da mochila e do caixeiro viajante métrico permitem uma aproximação absoluta constante, mas não o problema do caixeiro viajante. ◊

3.3. Técnicas de aproximação

3.3.1. Algoritmos gulosos

Cobertura de vértices

Algoritmo 3.1 (Cobertura de vértices)
Entrada Grafo não-direcionado $G = (V, E)$.

Saída Cobertura de vértices $C \subseteq V$.

```
1  VC-GV(G) :=
2    (C, G) := Reduz(G)
3    if V = ∅ then
4      return C
5    else
6      escolhe v ∈ V : deg(v) = Δ(G) { grau máximo }
7      return C ∪ {v} ∪ VC-GV(G − v)
8    end if
```

Proposição 3.1
O algoritmo VC-GV é uma $O(\log |V|)$-aproximação.

Prova. Seja G_i o grafo depois da iteração i e C^* uma cobertura ótima, i.e., $|C^*| = \mathrm{OPT}(G)$.

A cobertura ótima C^* é uma cobertura para G_i também. Logo, a soma dos graus dos vértices em C^* (contando somente arestas em G_i!) ultrapassa o número de arestas em G_i

$$\sum_{v \in C^*} \delta_{G_i}(v) \geq \|G_i\|$$

e o grau médio dos vértices em G_i satisfaz

$$\bar{\delta}_{G_i}(G_i) = \frac{\sum_{v \in C^*} \delta_{G_i}(v)}{|C^*|} \geq \frac{\|G_i\|}{|C^*|} = \frac{\|G_i\|}{\mathrm{OPT}(G)}.$$

Como o grau máximo é maior que o grau médio temos também

$$\Delta(G_i) \geq \frac{\|G_i\|}{\mathrm{OPT}(G)}.$$

Com isso podemos estimar

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq i < \mathrm{OPT}} \Delta(G_i) &\geq \sum_{0 \leq i < \mathrm{OPT}} \frac{\|G_i\|}{|\mathrm{OPT}(G)|} \geq \sum_{0 \leq i < \mathrm{OPT}} \frac{\|G_{\mathrm{OPT}}\|}{|\mathrm{OPT}(G)|} \\ &= \|G_{\mathrm{OPT}}\| = \|G\| - \sum_{0 \leq i < \mathrm{OPT}} \Delta(G_i)\end{aligned}$$

ou

$$\sum_{0 \le i < OPT} \Delta(G_i) \ge \|G\|/2,$$

i.e. a metade das arestas foi removido em OPT iterações. Essa estimativa continua a ser válido, logo após

$$OPT\,\lceil \lg \|G\| \rceil \le OPT\,\lceil 2 \log |G| \rceil = O(OPT \log |G|)$$

iterações não tem mais arestas. Como em cada iteração foi escolhido um vértice, a taxa de aproximação é $\log |G|$. ■

Algoritmo 3.2 (Cobertura de vértices)
Entrada Grafo não-direcionado $G = (V, E)$.

Saída Um cobertura de vértices $C \subseteq V$.

```
1  VC-GE(G) :=
2    (C, G) := Reduz(G)
3    if E = ∅ then
4      return C
5    else
6      escolhe e = {u, v} ∈ E
7      return C ∪ {u, v} ∪ VC-GE(G − {u, v})
8    end if
```

Proposição 3.2
Algoritmo VC-GE é uma 2-aproximação para VC.

Prova. Cada cobertura contém pelo menos um dos dois vértices escolhidos, logo

$$|C| \ge \phi_{\text{VC-GE}}(G)/2 \Rightarrow 2OPT(G) \ge \phi_{\text{VC-GE}}(G).$$

■

Algoritmo 3.3 (Cobertura de vértices)
Entrada Grafo não-direcionado $G = (V, E)$.

Saída Cobertura de vértices $C \subseteq V$.

```
1  VC-B(G) :=
2    (C, G) := Reduz(G)
3    if V = ∅ then
4      return C
5    else
6      escolhe v ∈ V : deg(v) = Δ(G) { grau máximo }
```

```
 7       C₁ := C ∪ {v} ∪ VC-B(G − v)
 8       C₂ := C ∪ N(v) ∪ VC-B(G − v − N(v))
 9       if |C₁| < |C₂| then
10         return C₁
11       else
12         return C₂
13       end if
14     end if
```

Problema da mochila

KNAPSACK

Instância Um número n de itens com valores $v_i \in \mathbb{N}$ e tamanhos $t_i \in \mathbb{N}$, para $i \in [n]$, um limite M, tal que $t_i \leq M$ (todo item cabe na mochila).

Solução Uma seleção $S \subseteq [n]$ tal que $\sum_{i \in S} t_i \leq M$.

Objetivo Maximizar o valor total $\sum_{i \in S} v_i$.

Observação: O problema da mochila é NP-completo.

Como aproximar?

- Idéia: Ordene por v_i/t_i ("valor médio") em ordem decrescente e enche o mochila o mais possível nessa ordem.

Abordagem

```
1  K−G(vᵢ,tᵢ) :=
2    ordene os itens tal que vᵢ/tᵢ ≥ vⱼ/tⱼ, ∀i < j.
3    for i ∈ X do
4      if tᵢ < M then
5        S := S ∪ {i}
6        M := M − tᵢ
7      end if
8    end for
9    return S
```

Aproximação boa?

- Considere

$$v_1 = 1, \ldots, v_{n-1} = 1, v_n = M - 1$$
$$t_1 = 1, \ldots, t_{n-1} = 1, t_n = M = kn \qquad k \in \mathbb{N} \text{ arbitrário}$$

- Então:

$$v_1/t_1 = 1, \ldots, v_{n-1}/t_{n-1} = 1, v_n/t_n = (M-1)/M < 1$$

- K-G acha uma solução com valor $\varphi(x) = n-1$, mas o ótimo é $OPT(x) = M - 1$.

- Taxa de aproximação:

$$OPT(x)/\varphi(x) = \frac{M-1}{n-1} = \frac{kn-1}{n-1} \geq \frac{kn-k}{n-1} = k$$

- K-G não possui taxa de aproximação fixa!

- Problema: Não escolhemos o item com o maior valor.

Tentativa 2: Modificação

```
1  K−G'(v_i,t_i) :=
2    S_1 := K−G(v_i,t_i)
3    v_1 := ∑_{i∈S_1} v_i
4    S_2 := {argmax_i v_i}
5    v_2 := ∑_{i∈S_2} v_i
6    if v_1 > v_2 then
7      return S_1
8    else
9      return S_2
10   end if
```

Aproximação boa?

- O algoritmo melhorou?

- Surpresa

  Proposição 3.3
  K-G' é uma 2-aproximação, i.e. $OPT(x) < 2\varphi_{\text{K-G}'}(x)$.

Prova. Seja j o primeiro item que K-G não coloca na mochila. Nesse ponto temos valor e tamanho

$$\bar{v_j} = \sum_{1 \le i < j} v_i \le \varphi_{\text{K-G}}(x) \tag{3.3}$$

$$\bar{t_j} = \sum_{1 \le i < j} t_i \le M \tag{3.4}$$

Afirmação: $\text{OPT}(x) < \bar{v_j} + v_j$. Nesse caso

(a) Seja $v_j \le \bar{v_j}$.

$$\text{OPT}(x) < \bar{v_j} + v_j \le 2\bar{v_j} \le 2\varphi_{\text{K-G}}(x) \le 2\varphi_{\text{K-G}'}$$

(b) Seja $v_j > \bar{v_j}$

$$\text{OPT}(x) < \bar{v_j} + v_j < 2v_j \le 2v_{\max} \le 2\varphi_{\text{K-G}'}$$

Prova da afirmação: No momento em que item j não cabe, temos espaço $M - \bar{t_j} < t_j$ sobrando. Como os itens são ordenados em ordem de densidade decrescente, obtemos um limite superior para a solução ótima preenchendo esse espaço com a densidade v_j/t_j:

$$\text{OPT}(x) \le \bar{v_j} + (M - \bar{t_j})\frac{v_j}{t_j} < \bar{v_j} + v_j.$$

■

3.3.2. Aproximações com randomização

Randomização

- Idéia: Permite escolhas randômicas ("joga uma moeda")
- Objetivo: Algoritmos que decidem correta com probabilidade alta.
- Objetivo: Aproximações com *valor esperado* garantido.
- Minimização: $\mathsf{E}[\varphi_A(x)] \le 2\text{OPT}(x)$
- Maximização: $2\mathsf{E}[\varphi_A(x)] \ge \text{OPT}(x)$

Randomização: Exemplo

SATISFATIBILIDADE MÁXIMA, MAXIMUM SAT

Instância Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ sobre variáveis $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ em FNC.

Solução Uma atribuição de valores de verdade $a : V \to \mathbb{B}$.

Objetivo Maximiza o número de cláusulas satisfeitas

$$|\{C_i \mid [\![C_i]\!]_a = 1\}|.$$

Nossa solução

```
1  SAT−R(φ) :=
2    seja φ = φ(v1,...,vk)
3    for all i ∈ [1,k] do
4      escolhe vi = 1 com probabilidade 1/2
5    end for
```

Observação 3.1
A quantidade $[\![C]\!]_a$ é o valor da cláusula C na atribuição a. ◊

Aproximação?

- Surpresa: Algoritmo é 2-aproximação.

Prova. O valor esperado de uma cláusula C com l variáveis é $E[[\![C]\!]] = \Pr([\![C]\!] = 1) = 1 - 2^{-l} \geq 1/2$. Logo o valor esperado do número total $T = \sum_{i\in[n]} [\![C_i]\!]$ de cláusulas satisfeitas é

$$E[T] = E[\sum_{i\in[n]} [\![C_i]\!]] = \sum_{i\in[n]} E[[\![C_i]\!]] \geq n/2 \geq OPT/2$$

pela linearidade do valor esperado. ■

Outro exemplo

Cobertura de vértices guloso e randomizado.

```
1  VC−RG(G) :=
2    seja w̄ := Σ_{v∈V} deg(v)
3    C := ∅
4    while E ≠ ∅ do
```

```
    escolhe v ∈ V com probabilidade deg(v)/w̄
    C := C ∪ {v}
    G := G − v
  end while
  return C ∪ V
```

Resultado: $E[\phi_{\text{VC-RG}}(x)] \leq 2\text{OPT}(x)$.

3.3.3. Programação linear

Técnicas de programação linear são frequentemente usadas em algoritmo de aproximação. Entre eles são o *arredondamento randomizado* e *algoritmos primais-duais*.

Exemplo 3.2 (Arredondamento para cobertura por conjuntos)
Considere o problema de cobertura por conjuntos

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{i\in[n]} w_i x_i, && (3.5)\\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{i\in[n]\mid u\in C_i} x_i \geq 1, && \forall u \in U,\\ & x_i \in \{0,1\}, && \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

Seja f_e a frequência de um elemento e, i.e. o número de conjuntos que contém e e f a maior frequência. Um algoritmo de arredondamento simples é dado por

Teorema 3.1
A seleção dos conjuntos com $x_i \geq 1/f$ na relaxação linear de (3.5) é uma f-aproximação do problema de cobertura de conjuntos.

Prova. Como $|\{i \in [n] \mid u \in C_i\}| \leq f$, temos $x_i \geq 1/f$ em média sobre esse conjunto. Logo existe, para cada $u \in U$ um conjunto com $x_i \geq 1/f$ que cobre u e a seleção é uma solução válida. O arrendondamento aumenta o custo por no máximo um fator f, logo temos uma f-aproximação. ■ ◊

3.4. Esquemas de aproximação

Novas considerações

- Frequentemente uma r-aproximação não é suficiente. $r = 2$: 100% de erro!

- Existem aproximações melhores? p.ex. para SAT? problema do mochila?
- Desejável: Esquema de aproximação em tempo polinomial (EATP); polynomial time approximation scheme (PTAS)
  - Para cada entrada e taxa de aproximação r:
  - Retorne r-aproximação em tempo polinomial.

Um exemplo: Mochila máxima (Knapsack)

- Problema da mochila (veja página 110):
- Algoritmo MM-PD com programação dinâmica (pág. 160): tempo $O(n \sum_i v_i)$.
- Desvantagem: Pseudo-polinomial.

Denotamos uma instância do problema da mochila com $I = (\{v_i\}, \{t_i\})$.

```
1  MM−PTAS(I,r) :=
2    v_max := max_i{v_i}
3    t := ⌊log (r−1)/r · v_max/n⌋
4    v'_i := ⌊v_i/2^t⌋  para i = 1,...,n
5    Define a nova instância I' = ({v'_i},{t_i})
6    return MM-PD(I')
```

Teorema 3.2
MM-PTAS é uma r-aproximação em tempo $O(rn^3/(r-1))$.

Prova. A complexidade da preparação nas linhas 1–3 é $O(n)$. A chamada para MM-PD custa

$$O\left(n \sum_i v'_i\right) = O\left(n \sum_i \frac{v_i}{((r-1)/r)(v_{max}/n)}\right)$$
$$= O\left(\frac{r}{r-1} n^2 \sum_i v_i/v_{max}\right) = O\left(\frac{r}{r-1} n^3\right).$$

Seja S = MM-PTAS(I) a solução obtida pelo algoritmo e S^* uma solução

ótima.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{MM-PTAS}}(I,S) = \sum_{i\in S} v_i &\geq \sum_{i\in S} 2^t \left\lfloor v_i/2^t \right\rfloor && \text{definição de } \lfloor\cdot\rfloor \\
&\geq \sum_{i\in S^*} 2^t \left\lfloor v_i/2^t \right\rfloor && \text{otimalidade de MM-PD sobre } v'_i \\
&\geq \sum_{i\in S^*} v_i - 2^t && \text{(A.2)} \\
&= \left(\sum_{i\in S^*} v_i\right) - 2^t|S^*| \\
&\geq \text{OPT}(I) - 2^t n
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\text{OPT}(I) \leq \varphi_{\text{MM-PTAS}}(I,S) + 2^t n \leq \varphi_{\text{MM-PTAS}}(I,S) + \frac{\text{OPT}(x)}{v_{\max}} 2^t n \\
&\iff \text{OPT}(I)\left(1 - \frac{2^t n}{v_{\max}}\right) \leq \varphi_{\text{MM-PTAS}}(I,S)
\end{aligned}$$

e com $2^t n/v_{\max} \leq (r-1)/r$

$$\iff \text{OPT}(I) \leq r\varphi_{\text{MM-PTAS}}(I,S).$$

■

Um EATP frequentemente não é suficiente para resolver um problema adequadamente. Por exemplo temos um EATP para

- o problema do caixeiro viajante euclidiano com complexidade $O(n^{3000/\epsilon})$ (Arora, 1996);
- o problema do mochila múltiplo com complexidade $O(n^{12(\log 1/\epsilon)/\epsilon^8})$ (Chekuri, Kanna, 2000);
- o problema do conjunto independente máximo em grafos com complexidade $O(n^{(4/\pi)(1/\epsilon^2+1)^2(1/\epsilon^2+2)^2})$ (Erlebach, 2001).

Para obter uma aproximação com 20% de erro, i.e. $\epsilon = 0.2$ obtemos algoritmos com complexidade $O(n^{15000})$, $O(n^{375000})$ e $O(n^{523804})$, respectivamente!

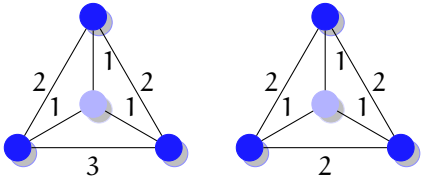


Figura 3.1.: Grafo com fecho métrico.

3.5. Aproximando o problema da árvore de Steiner mínima

Seja $G = (V, A)$ um grafo completo, não-direcionado com custos $c_a \geq 0$ nos arcos. O problema da árvore Steiner mínima (ASM) consiste em achar o subgrafo conexo mínimo que inclui um dado conjunto de *vértices necessários* ou *terminais* $R \subseteq V$. Esse subgrafo sempre é uma árvore (ex. 3.1). O conjunto $V \setminus R$ forma os *vértices Steiner*. Para um conjunto de arcos A, define o custo $c(A) = \sum_{a \in A} c_a$.

Observação 3.2
ASM é NP-completo. Para um conjunto fixo de vértices Steiner $V' \subseteq V \setminus R$, a melhor solução é a árvore geradora mínima sobre $R \cup V'$. Portanto a dificuldade é a seleção dos vértices Steiner da solução ótima. ◊

Definição 3.5
Os custos são *métricos* se eles satisfazem a desigualdade triangular, i.e.

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$$

para qualquer tripla de vértices i, j, k.

Teorema 3.3
Existe uma redução preservando a aproximação de ASM para a versão métrica do problema.

Prova. O fecho métrico de $G = (V, A)$ é um grafo G' completo sobre vértices e com custos $c'_{ij} := d_{ij}$, sendo d_{ij} o comprimento do menor caminho entre i e j em G. Evidentemente $c'_{ij} \leq c_{ij}$ e portanto (3.1) é satisfeita. Para ver que (3.2) é satisfeita, seja T' uma solução de ASM em G'. Define T como união de todos caminhos definidos pelos arcos em T', menos um conjunto de arcos para remover eventuais ciclos. O custo de T é no máximo $c(T')$ porque o custo de todo caminho é no máximo o custo da aresta correspondente em T'. ■
Consequência: Para o problema do ASM é suficiente considerar o caso métrico.

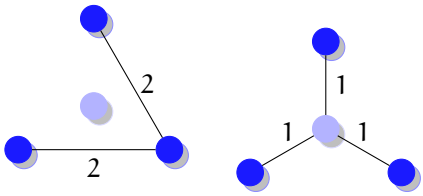


Figura 3.2.: AGM sobre R e melhor solução. ●: vértice em R, ●: vértice Steiner.

Teorema 3.4
O AGM sobre R é uma 2-aproximação para o problema do ASM.

Prova. Considere a solução ótima S^* de ASM. Duplica todas arestas[1] tal que todo vértice possui grau par. Encontra um ciclo Euleriano nesse grafo. Remove vértices duplicados nesse caminho. O custo do caminho C obtido dessa forma não é mais que o dobro do custo original: o grafo com todas arestas custa $2c(S^*)$ e a remoção de vértices duplicados não aumenta esse custo, pela metricidade. Como esse caminho é uma árvore geradora, temos $c(A) \leq c(C) \leq 2c(S^*)$ para AGM A. ■

3.6. Aproximando o PCV

Teorema 3.5
Para qualquer função $\alpha(n)$ computável em tempo polinomial o PCV não possui $\alpha(n)$-aproximação em tempo polinomial, caso $P \neq NP$.

Prova. Via redução de HC para PCV. Para uma instância $G = (V, A)$ de HC define um grafo completo G' com

$$c_a = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ \alpha(n)n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se G possui um ciclo Hamiltoniano, então o custo da menor rota é n. Caso contrário qualquer rota usa ao menos uma aresta de custo $\alpha(n)n$ e portanto o custo total é $\geq \alpha(n)n$. Portanto, dado uma $\alpha(n)$-aproximação de PCV podemos decidir HC em tempo polinomial. ■

Caso métrico No caso métrico podemos obter uma aproximação melhor. Determina uma rota como segue:

[1] Isso transforma G num multigrafo.

1. Determina uma AGM A de G.
2. Duplica todas arestas de A.
3. Acha um ciclo Euleriano nesse grafo.
4. Remove vértices duplicados.

Teorema 3.6
O algoritmo acima define uma 2-aproximação.

Prova. A melhor solução do PCV menos uma aresta é uma árvore geradora de G. Portanto $c(A) \leq OPT$. A solução S obtida pelo algoritmo acima satisfaz $c(S) \leq 2c(A)$ e portanto $c(S) \leq 2OPT$, pelo mesmo argumento da prova do teorema 3.4. ■

O fator 2 dessa aproximação é resultado do passo 2 que duplica todas arestas para garantir a existência de um ciclo Euleriano. Isso pode ser garantido mais barato: A AGM A possui um número par de vértices com grau ímpar (ver exercício 3.2), e portanto podemos calcular um emparelhamento perfeito mínimo E entre esse vértices. O grafo com arestas $A \cup E$ possui somente vértices com grau par e portanto podemos aplicar os restantes passos nesse grafo.

Teorema 3.7 (Cristofides)
A algoritmo usando um emparelhamento perfeito mínimo no passo 2 é uma 3/2-aproximação.

Prova. O valor do emparelhamento E não é mais que $OPT/2$: remove vértices não emparelhados em E da solução ótima do PCV. O ciclo obtido dessa forma é a união dois emparelhamentos perfeitos E_1 e E_2 formados pelas arestas pares ou ímpares no ciclo. Com E_1 o emparelhamento de menor custo, temos

$$c(E) \leq c(E_1) \leq (c(E_1) + c(E_2))/2 = OPT/2$$

e portanto

$$c(S) = c(A) + c(E) \leq OPT + OPT/2 = 3/2OPT.$$

■

3.7. Aproximando problemas de cortes

Seja $G = (V, A, c)$ um grafo conectado com pesos c nas arestas. Lembramos que um corte C é um conjunto de arestas que separa o grafo em dois partes $S \dot{\cup} V \setminus S$. Dado dois vértices $s, t \in V$, o problema de achar um corte mínimo que separa s e t pode ser resolvido via fluxo máximo em tempo polinomial. Generalizações desse problema são:

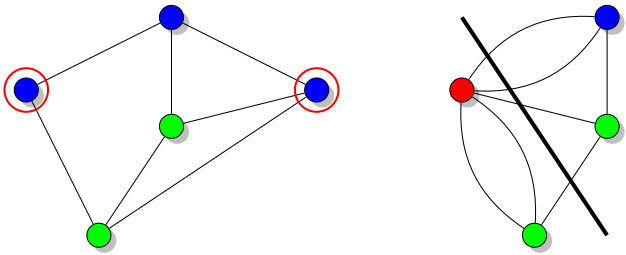


Figura 3.3.: Identificação de dois terminais e um corte no grafo reduzido. Vértices em verde, terminais em azul. O grafo reduzido possui múltiplas arestas entre vértices.

- Corte múltiplo mínimo (CMM): Dado terminais $s_1, \ldots, s_k$ determine o menor corte C que separa todos.
- k-corte mínimo (k-CM): Mesmo problema, sem terminais definidos. (Observe que todos k componentes devem ser não vazios).

Fato 3.1
CMM é NP-difícil para qualquer $k \geq 3$. k-CM possui uma solução polinomial em tempo $O(n^{k^2})$ para qualquer k, mas é NP-difícil, caso k faz parte da entrada (Goldschmidt e Hochbaum, 1988).

Solução de CMM Chamamos um corte que separa um vértice dos outros um *corte isolante*. Idéia: A união de cortes isolantes para todo s_i é um corte múltiplo. Para calcular o corte isolante para um dado terminal s_i, identificamos os restantes terminais em um único vértice S e calculamos um corte mínimo entre s_i e S. (Na identificação de vértices temos que remover self-loops, e somar os pesos de múltiplas arestas.)
Isso leva ao algoritmo

Algoritmo 3.4 (CI)
Entrada Grafo $G = (V, A, c)$ e terminais $s_1, \ldots, s_k$.

Saída Um corte múltiplo que separa os s_i.

```
1  Para cada i ∈ [1,k]: Calcula o corte isolante C_i de s_i.
2  Remove o maior desses cortes e retorne a união dos
       restantes.
```

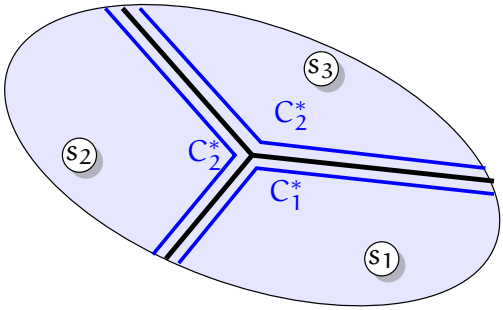


Figura 3.4.: Corte múltiplo e decomposição em cortes isolantes.

Teorema 3.8
Algoritmo 3.4 é uma $2 - 2/k$-aproximação.

Prova. Considere o corte mínimo C^*. De acordo com a Fig. 3.4 ele pode ser representado pela união de k cortes que separam os k componentes individualmente:

$$C^* = \bigcup_{i \in [k]} C_i^*.$$

Cada aresta de C^* faz parte das cortes das duas componentes adjacentes, e portanto

$$\sum_{i \in [k]} w(C_i^*) = 2w(C^*)$$

e ainda $w(C_i) \leq w(C_i^*)$ para os cortes C_i do algoritmo 3.4, porque usamos o corte isolante mínimo de cada componente. Logo, para o corte C retornado pelo algoritmo temos

$$w(C) \leq (1 - 1/k) \sum_{i \in [k]} w(C_i) \leq (1 - 1/k) \sum_{i \in [k]} w(C_i^*) \leq 2(1 - 1/k) w(C^*).$$

■

A análise do algoritmo é ótimo, como o exemplo da Fig. 3.5 mostra. O menor corte que separa s_i tem peso $2 - \epsilon$, portanto o algoritmo retorne um corte de peso $(2 - \epsilon)k - (2 - \epsilon) = (k - 1)(2 - \epsilon)$, enquanto o menor corte que separa todos terminais é o ciclo interno de peso k.

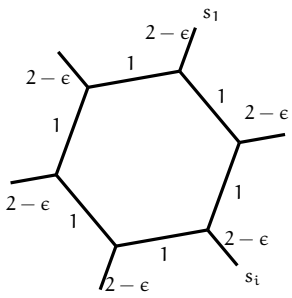


Figura 3.5.: Exemplo de um grafo em que o algoritmo 3.4 retorna uma $2-2/k$-aproximação.

Solução de k-CM Problema: Como saber a onde cortar?

Fato 3.2
Existem somente $n-1$ cortes diferentes num grafo. Eles podem ser organizados numa árvore de *Gomory-Hu* (AGH) $T = (V, T)$. Cada aresta dessa árvore define um corte associado em G pelos dois componentes após a sua remoção.

1. Para cada $u, v \in V$ o menor corte u–v em G é igual a o menor corte u–v em T (i.e. a aresta de menor peso no caminho único entre u e v em T).

2. Para cada aresta $a \in T$, $w'(a)$ é igual a valor do corte associado.

Por consequência, a AGH codifica o valor de todos cortes em G.
Ele pode ser calculado determinando $n-1$ cortes s–t mínimos:

1. Define um grafo com um único vértice que representa todos vértices do grafo original. Chama um vértice que representa mais que um vértice do grafo original *gordo*.

2. Enquanto existem vértices gordos:
   a) Escolhe um vértice gordo e dois vértices do grafo original que ele representa.
   b) Calcula um corte mínimo entre esses vértices.
   c) Separa o vértice gordo de acordo com o corte mínimo encontrado.

Observação: A união dos cortes definidos por $k-1$ arestas na AGH separa G em pelo menos k componentes. Isso leva ao seguinte algoritmo.

Algoritmo 3.5 (KCM)
Entrada Grafo $G = (V, A, c)$.

Saida Um k-corte.

```
1  Calcula uma AGH T em G.
2  Forma a união dos k−1 cortes mais leves
       definidos por k−1 arestas em T.
```

Teorema 3.9
Algoritmo 3.5 é uma $2 - 2/k$-aproximação.

Prova. Seja $C^* = \bigcup_{i \in [k]} C_i^*$ um corte mínimo, decomposto igual à prova anterior. O nosso objetivo é demonstrar que existem $k-1$ cortes definidos por uma aresta em T que são mais leves que os C_i^*.
Removendo C^* de G gera componentes $V_1, \ldots, V_k$: Define um grafo sobre esses componentes contraindo os vértices de uma componente, com arcos da AGH T entre os componentes, e eventualmente removendo arcos até obter uma nova árvore T'. Seja C_k^* o corte de maior peso, e define V_k como raiz da árvore. Desta forma, cada componente $V_1, \ldots, V_{k-1}$ possui uma aresta associada na direção da raiz. Para cada dessas arestas (u, v) temos

$$w(C_i^*) \geq w'(u, v)$$

porque C_i^* isola o componente V_i do resto do grafo (particularmente separa u e v), e $w'(u, v)$ é o peso do menor corte que separa u e v. Logo

$$w(C) \leq \sum_{a \in T'} w'(a) \leq \sum_{1 \leq i < k} w(C_i^*) \leq (1 - 1/k) \sum_{i \in [k]} w(C_i^*) = 2(1 - 1/k) w(C^*).$$

■

3.8. Aproximando empacotamento unidimensional

Dado n itens com tamanhos $s_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \in [n]$ e contêineres de capacidade $S \in \mathbb{Z}_+$ o problema do *empacotamento unidimensional* é encontrar o menor número de contêineres em que os itens podem ser empacotados.

EMPACOTAMENTO UNIDIMENSIONAL (MIN-EU) (BIN PACKING)

Entrada Um conjunto de n itens com tamanhos $s_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \in [n]$ e o tamanho de um contêiner S.

Solução Uma partição de $[n] = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ tal que $\sum_{i \in C_k} s_i \leq S$ para $k \in [m]$.

Objetivo Minimiza o número de partes ("contêineres") m.

A versão de decisão do empacotamento unidimensional (EU) pede decidir se os itens cabem em m contêineres.

Fato 3.3
EU é fortemente NP-completo.

Proposição 3.4
Para um tamanho S fixo EU pode ser resolvido em tempo $O(n^{S^S})$.

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os itens possuem tamanhos $1, 2, \ldots, S-1$. Um padrão de alocação de um contêiner pode ser descrito por uma tupla $(t_1, \ldots, t_{S-1})$ sendo t_i o número de itens de tamanho i. Seja T o conjunto de todos padrões que cabem num contêiner. Como $0 \leq t_i \leq S$ o número total de padrões T é menor que $(S+1)^{S-1} = O(S^S)$. Uma ocupação de m contêineres pode ser descrito por uma tupla $(n_1, \ldots, n_T)$ com n_i sendo o número de contêineres que usam padrão i. O número de contêineres é no máximo n, logo $0 \leq n_i \leq n$ e o número de alocações diferentes é no máximo $(n+1)^T = O(n^T)$. Logo podemos enumerar todas possibilidades em tempo polinomial. ■

Proposição 3.5
Para um m fixo, EU pode ser resolvido em tempo pseudo-polinomial.

Prova. Seja $B(S_1, \ldots, S_m, i) \in \{\text{falso}, \text{verdadeiro}\}$ a resposta se itens $i, i+1, \ldots, n$ cabem em m contêineres com capacidades $S_1, \ldots, S_m$. B satisfaz

$$B(S_1, \ldots, S_m, i) = \begin{cases} \bigvee_{\substack{1 \leq j \leq m \\ s_i \leq S_j}} B(S_1, \ldots, S_j - s_j, \ldots, S_m, i+1), & i \leq n, \\ \text{verdadeiro}, & i > n, \end{cases}$$

e $B(S, \ldots, S, 1)$ é a solução do EU[2]. A tabela B possui no máximo $n(S+1)^m$ entradas, cada uma computável em tempo $O(m)$, logo o tempo total é no máximo $O(mn(S+1)^m)$. ■

Observação 3.3
Com um fator adicional de $O(\log m)$ podemos resolver também MIN-EU, procurando o menor i tal que $B(\underbrace{S, \ldots, S}_{i \text{ vezes}}, 0, \ldots, 0, n)$ é verdadeiro. ◊

[2]Observe que a disjunção vazia é falsa.

A proposição 3.4 pode ser melhorada usando programação dinâmica.

Proposição 3.6
Para um número fixo k de tamanhos diferentes, min-EU pode ser resolvido em tempo $O(n^{2k})$.

Prova. Seja $B(i_1, \ldots, i_k)$ o menor número de contêineres necessário para empacotar i_j itens do j-ésimo tamanho e T o conjunto de todas padrões de alocação de um contêiner. B satisfaz

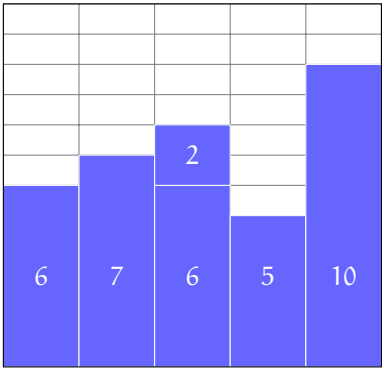
$$B(i_1, \ldots, i_k) = \begin{cases} 1 + \min_{\substack{t \in T \\ t \leq i}} B(i_1 - t_1, \ldots, i_k - t_k), & \text{caso } (i_1, \ldots, i_k) \notin T, \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $B(n_1, \ldots, n_k)$ é a solução do EU, com n_i o número de itens de tamanho i na entrada. A tabela B tem no máximo n^k entradas. Como o número de itens em cada padrão de alocação é no máximo n, temos $|T| \leq n^k$ e logo o tempo total para preencher B é no máximo $O(n^{2k})$. ■

Corolário 3.1
Para um tamanho S fixo min-EU pode ser resolvido em tempo $O(n^{2S})$.

Abordagem prática?

- Idéia simples: Próximo que cabe (PrC).
- Por exemplo: Itens $6, 7, 6, 2, 5, 10$ com limite 12.



Aproximação?

- Interessante: PrC é 2-aproximação.

- Observação: PrC é um algoritmo on-line.

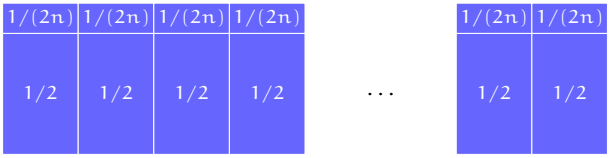
Prova. Seja B o número de contêineres usadas, $V = \sum_{i \in [n]} s_i$. Como dois contêineres consecutivos contém uma soma > 1, temos $\lfloor B/2 \rfloor < V$ e com $B/2 - 1/2 \leq \lfloor B/2 \rfloor$ ainda $B - 1 < 2V$ ou $B \leq 2V$. Mas precisamos pelo menos $\lceil V \rceil$ contêineres, logo $\lceil V \rceil \leq \mathrm{OPT}(x)$. Portanto, $\varphi_{\mathrm{PrC}}(x) \leq 2V \leq 2\lceil V \rceil \leq 2\mathrm{OPT}(x)$. ■

Aproximação melhor?

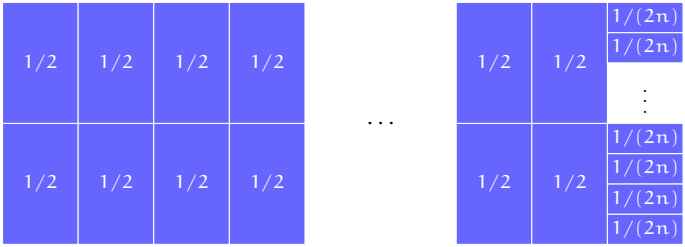
- Isso é a melhor estimativa possível para este algoritmo!
- Considere os $4n$ itens

$$\underbrace{1/2, 1/2n, 1/2, 1/2n, \ldots, 1/2, 1/2n}_{2n \text{ vezes}}$$

- O que faz PrC? $\varphi_{\mathrm{PrC}}(x) = 2n$: contêineres com



- Ótimo: n contêineres com dois elementos de $1/2 +$ um com $2n$ elementos de $1/2n$. $\mathrm{OPT}(x) = n = 1$.



- Portanto: Assintoticamente a taxa de aproximação 2 é estrito.

Melhores estratégias

- Primeiro que cabe (PiC), on-line, com "estoque" na memória
- Primeiro que cabe em ordem decrescente: PiCD, off-line.

- Taxa de aproximação?

$$\varphi_{\mathrm{PiC}}(x) \leq \lceil 1.7\mathrm{OPT}(x) \rceil$$
$$\varphi_{\mathrm{PiCD}}(x) \leq 1.5\mathrm{OPT}(x) + 1$$

Prova. (Da segunda taxa de aproximação.) Considere a partição $A \cup B \cup C \cup D = \{v_1, \ldots, v_n\}$ com

$$A = \{v_i \mid v_i > 2/3\}$$
$$B = \{v_i \mid 2/3 \geq v_i > 1/2\}$$
$$C = \{v_i \mid 1/2 \geq v_i > 1/3\}$$
$$D = \{v_i \mid 1/3 \geq v_i\}$$

PiCD primeiro vai abrir $|A|$ contêineres com os itens do tipo A e depois $|B|$ contêineres com os itens do tipo B. Temos que analisar o que acontece com os itens em C e D.
Supondo que um contêiner contém somente itens do tipo D, os outros contêineres tem espaço livre menos que $1/3$, senão seria possível distribuir os itens do tipo D para outros contêineres. Portanto, nesse caso

$$B \leq \left\lceil \frac{V}{2/3} \right\rceil \leq 3/2V + 1 \leq 3/2\mathrm{OPT}(x) + 1.$$

Caso contrário (nenhum contêiner contém somente itens tipo D), PiCD encontra a solução ótima. Isso pode ser justificado pelas seguintes observações:

1) O número de contêineres sem itens tipo D é o mesmo (eles são os últimos distribuídos em não abrem um novo contêiner). Logo é suficiente mostrar

$$\varphi_{\mathrm{PiCD}}(x \setminus D) = \mathrm{OPT}(x \setminus D).$$

2) Os itens tipo A não importam: Sem itens D, nenhum outro item cabe junto com um item do tipo A. Logo:

$$\varphi_{\mathrm{PiCD}}(x \setminus D) = |A| + \varphi_{\mathrm{PiCD}}(x \setminus (A \cup D)).$$

3) O melhor caso para os restantes itens são *pares* de elementos em B e C: Nessa situação, PiCD encontra a solução ótima.

■

Garantia ou aproximação melhor?

- Johnson (1973, Tese de doutorado)

$$\varphi_{\mathrm{PiCD}}(x) \leq 11/9\,\mathrm{OPT}(x) + 4$$

- Baker (1985)

$$\varphi_{\mathrm{PiCD}}(x) \leq 11/9\,\mathrm{OPT}(x) + 3$$

- Uma variante de PiCD (Johnson e Garey, 1985):

$$\varphi_{\mathrm{PiCDM}}(x) \leq 71/60\,\mathrm{OPT}(x) + 31/6$$

3.8.1. Um esquema de aproximação assintótico para min-EU

Duas ideias permitem aproximar min-EU em $(1+\epsilon)\mathrm{OPT}(I)+1$ para $\epsilon \in (0, 1]$.

Ideia 1: Arredondamento Para uma instância I, define uma instância R arredondada como segue:

1. Ordene os itens de forma não-decrescente e forma grupos de k itens.
2. Substitui o tamanho de cada item pelo tamanho do maior elemento no seu grupo.

Lema 3.1
Para uma instância I e a instância R arredondada temos

$$\mathrm{OPT}(R) \leq \mathrm{OPT}(I) + k$$

Prova. Supõe que temos uma solução ótima para I. Os itens do i-ésimo grupo de R cabem nos lugares dos itens do $i+1$-ésimo grupo dessa solução. Para o último grupo de R temos que abrir no máximo k contêineres. ■

Ideia 2: Descartando itens menores

Lema 3.2
Supõe temos temos um empacotamento para itens de tamanho maior que s_0 em B contêineres. Então existe um empacotamento de todos itens com no máximo

$$\max\Big\{B, \sum_{i\in[n]} s_i/(S - s_0) + 1\Big\}$$

contêineres.

Prova. Empacota os itens menores gulosamente no primeiro contêiner com espaço suficiente. Sem abrir um novo contêiner o limite é obviamente correto. Caso contrário, supõe que precisamos B' contêineres. $B'-1$ contêineres contém itens de tamanho total mais que $S - s_0$. A ocupação total W deles tem que ser menor que o tamanho total dos itens, logo

$$(B' - 1)(S - s_0) \leq W \leq \sum_{i \in [n]} s_i.$$

■

Juntando as ideias

Teorema 3.10
Para $\epsilon \in (0, 1]$ podemos encontrar um empacotamento usando no máximo $(1 + \epsilon)\mathrm{OPT}(I) + 1$ contêineres em tempo $O(n^{16/\epsilon^2})$.

Prova. O algoritmo tem dois passos:

1. Empacota todos itens de tamanho maior que $s_0 = \lceil \epsilon/2\, S \rceil$ usando arredondamento.
2. Empacota os itens menores depois.

Seja I' a instância com os $n' \leq n$ itens maiores. No primeiro passo, formamos grupos com $\lfloor n'\epsilon^2/4 \rfloor$ itens. Isso resulta em no máximo

$$\frac{n'}{\lfloor n'\epsilon^2/4 \rfloor} \leq \frac{2n'}{n'\epsilon^2/4} = \frac{8}{\epsilon^2}$$

grupos. (A primeira desigualdade usa $\lfloor x \rfloor \geq x/2$ para $x \geq 1$. Podemos supor que $n'\epsilon^2/4 \geq 1$, i.e. $n' \geq 4/\epsilon^2$. Caso contrário podemos empacotar os itens em tempo constante usando a proposição 3.6.)
Arredondando essa instância de acordo com lema 3.1 podemos obter uma solução em tempo $O(n^{16/\epsilon^2})$ pela proposição 3.6. Sabemos que $\mathrm{OPT}(I') \geq n' \lceil \epsilon/2\, S \rceil / S \geq n'\epsilon/2$. Logo temos uma solução com no máximo

$$\mathrm{OPT}(I') + \lfloor n\epsilon^2/4 \rfloor \leq \mathrm{OPT}(I') + n'\epsilon^2/4 \leq (1 + \epsilon/2)\mathrm{OPT}(I') \leq (1 + \epsilon/2)\mathrm{OPT}(I)$$

contêineres.
O segundo passo, pelo lema 3.2, produz um empacotamento com no máximo

$$\max\left\{(1 + \epsilon/2)\mathrm{OPT}(I), \sum_{i \in [n]} s_i/(S - s_0) + 1\right\}$$

contêineres, mas

$$\frac{\sum_{i\in[n]} s_i}{S - s_0} \leq \frac{\sum_{i\in[n]} s_i}{S(1-\epsilon/2)} \leq \frac{OPT(I)}{1-\epsilon/2} \leq (1+\epsilon)OPT(I).$$

■

3.9. Aproximando problemas de sequênciamento

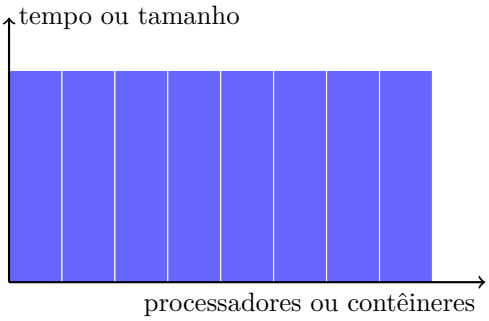
Problemas de sequênciamento recebem nomes da forma

$$\alpha \mid \beta \mid \gamma$$

com campos

Máquina α	
1	Um processador
P	Processadores paralelos
Q	Processadores relacionados
R	Processadores arbitrários
Restrições β	
D_i	Prazo máximo (deadline)
d_i	Prazo previsto (due dates)
r_i	Tempo de liberação (release time)
$p_i = p$	Tempo uniforme p
prec	Precedências
Função objetivo γ	
C_{max}	Maior tempo de término (maximum completion time)
$\sum_i C_i$	Tempo de término total (total completion time)
L_i	Atraso (lateness) $C_i - d_i$
T_i	Tardiness $\max\{L_i, 0\}$

Relação com empacotamento unidimensional:



- Empacotamento unidimensional: Dado C_{max} minimiza o número de processadores.
- $P \parallel C_{max}$: Dado um número de contêineres, minimiza o tamanho dos contêineres.

SEQUENCIAMENTO EM PROCESSORES PARALELOS ($P \parallel C_{max}$)

Entrada O número m de processadores e n tarefas com tempo de execução p_i, $i \in [n]$.

Solução Um *sequenciamento*, definido por uma alocação $M_1 \dot\cup \cdots \dot\cup M_m = [n]$ das tarefas às máquinas.

Objetivo Minimizar o *makespan* (tempo de término) $C_{max} = \max_{j\in[m]} C_j$, com $C_j = \sum_{i\in M_j} p_i$ o tempo de término da máquina j.

Fato 3.4
O problema $P \parallel C_{max}$ é fortemente NP-completo.

Um limite inferior para $C^*_{max} = \text{OPT}$ é

$$\text{LB} = \max\Big\{\max_{i\in[n]} p_i, \sum_{i\in[n]} p_i/m\Big\}.$$

Uma classe de algoritmos gulosos para este problema são os algoritmos de *sequenciamento em lista* (inglês: list scheduling). Eles processam as tarefas em alguma ordem, e alocam a tarefa atual sempre à máquina de menor tempo de término atual.

Proposição 3.7
Sequenciamento em lista com ordem arbitrária permite uma $2-1/m$-aproximação em tempo $O(n \log n)$.

Prova. Seja C_{max} o resultado do sequenciamento em lista. Considera uma máquina com tempo de término C_{max}. Seja j a última tarefa alocada nessa máquina e C o término da máquina antes de alocar tarefa j. Logo,

$$\begin{aligned} C_{max} = C + p_j &\leq \sum_{i \in [j-1]} p_i/m + p_j \leq \sum_{i \in [n]} p_i/m - p_j/m + p_j \\ &\leq LB + (1 - 1/m)LB = (2 - 1/m)LB \leq (2 - 1/m)C^*_{max}. \end{aligned}$$

A primeira desigualdade é correta, porque alocando tarefa j a máquina tem tempo de término mínimo. Usando uma fila de prioridade a máquina com o menor tempo de término pode ser encontrada em tempo $O(\log n)$. ■

Observação 3.4
Pela prova da proposição 3.7 temos

$$LB \leq C^*_{max} \leq 2LB.$$

◊

O que podemos ganhar com algoritmos off-line? Uma abordagem é ordenar as tarefas por tempo execução não-crescente e aplicar o algoritmo gulos. Essa abordagem é chamada LPT (largest processing time).

Proposição 3.8
LPT é uma $4/3 - m/3$-aproximação em tempo $O(n \log n)$.

Prova. Seja $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ e supõe que isso é o menor contra-exemplo em que o algoritmo retorne $C_{max} > (4/3 - m/3)C^*_{max}$. Não é possível que a alocação do item $j < n$ resulta numa máquina com tempo de término C_{max}, porque $p_1, \ldots, p_j$ seria um contra-exemplo menor (mesmo C_{max}, menor C^*_{max}). Logo a alocação de p_n define o resultado C_{max}.
Caso $p_n \leq C^*_{max}/3$ pela prova da proposição 3.7 temos $C_{max} \leq (4/3 - m/3)C^*_{max}$, uma contradição. Mas caso $p_n > C^*_{max}/3$ todas tarefas possuem tempo de execução pelo menos $C^*_{max}/3$ e no máximo duas podem ser executadas em cada máquina. Logo $C_{max} \leq 2/3C^*_{max}$, outra contradição. ■

3.9.1. Um esquema de aproximação para $P \parallel C_{max}$

Pela observação 3.4 podemos reduzir o $P \parallel C_{max}$ para o empacotamento unidimensional via uma busca binária no intervalo $[LB, 2LB]$. Pela proposição 3.5 isso é possível em tempo $O(\log LB\, mn(2LB + 1)^m)$.

Com mais cuidado a observação permite um esquema de aproximação em tempo polinomial assintótico: similar com o esquema de aproximação para empacotamento unidimensional, vamos *remover elementos menores* e *arredondar* a instância.

Algoritmo 3.6 (Sequencia)
Entrada Uma instância I de $P \parallel C_{max}$, um término máximo C e um parâmetro de qualidade ϵ.

```
1  Sequencia(I,C,ε):=
2    remove as tarefas menores com p_j < εC, j ∈ [n]
3    arredonda cada p_j ∈ [εC(1+ε)^i, εC(1+ε)^{i+1}) para algum i
         para p'_j = εC(1+ε)^i
4    resolve a instância arredondada com programação
         dinâmica (proposição 3.6)
5    empacota os itens menores gulosamente, usando novas
         máquinas para manter o término (1+ε)C
```

Lema 3.3
O algoritmo Sequencia gera um sequenciamento que termina em no máximo $(1+\epsilon)C$ em tempo $O(n^{2\lceil \log_{1+\epsilon} 1/\epsilon \rceil})$. Ele não usa mais máquinas que o mínimo necessário para executar as tarefas com término C

Prova. Para cada intervalo válido temos $\epsilon C(1+\epsilon)^i \leq C$, logo o número de intervalos é no máximo $k = \lceil \log_{1+\epsilon} 1/\epsilon \rceil$. O valor k também é um limite para o número de valores p'_j distintos e pela proposição 3.6 o terceiro passo resolve a instância arredondada em tempo $O(n^{2k})$. Essa solução com os itens de tamanho original termina em no máximo $(1+\epsilon)C$, porque $p_j/p'_j < 1+\epsilon$. O número mínimo de máquinas para executar as tarefas em tempo C é o valor $m := \text{min-EU}(C, (p_j)_{j\in[n]})$ do problema de empacotamento unidimensional correspondente. Caso o último passo do algoritmo não usa novas máquinas ele precisa $\leq m$ máquinas, porque a instância arredondada foi resolvida exatamente. Caso contrário, uma tarefa com tempo de execução menor que ϵC não cabe nenhuma máquina, e todas máquinas usadas tem tempo de término mais que C. Logo o empacotamento ótimo com término C tem que usar pelo menos o mesmo número de máquinas. ■

Proposição 3.9
O resultado da busca binária usando o algoritmo Sequencia $C_{max} = \min\{C \in [LB, 2LB] \mid \text{Sequencia}(I, C, \epsilon) \leq m\}$ é no máximo C^*_{max}.

Prova. Com Sequencia$(I, C, \epsilon) \leq$ min-EU$(C, (p_i)_{i\in[n]})$ temos

$$\begin{aligned} C_{max} &= \min\{C \in [LB, 2LB] \mid \text{Sequencia}(I, C, \epsilon) \leq m\} \\ &\leq \min\{C \in [LB, 2LB] \mid \text{min-EU}(C, (p_i)_{i\in[n]}) \leq m\} \\ &= C^*_{max} \end{aligned}$$

■

Teorema 3.11
A busca binária usando o algoritmo Sequencia para determinar determina um sequenciamento em tempo $O(n^{2\lceil \log_{1+\epsilon} 1/\epsilon\rceil} \log LB)$ de término máximo $(1+\epsilon)C^*_{max}$.

Prova. Pelo lema 3.3 e proposição 3.9. ■

3.10. Exercícios

Exercício 3.1
Por que um subgrafo conexo de menor custo sempre é uma árvore?

Exercício 3.2
Mostra que o número de vértices com grau ímpar num grafo sempre é par.

Exercício 3.3
Um aluno propõe a seguinte heurística para o empacotamento unidimensional: Ordene os itens em ordem crescente, coloca o item com peso máximo junto com quantas itens de peso mínimo que é possível, e depois continua com o segundo maior item, até todos itens foram colocados em bins. Temos o algoritmo

```
1  ordene itens em ordem crescente
2  m := 1; M := n
3  while (m < M) do
4    abre novo contêiner, coloca v_M, M := M − 1
5    while (v_m cabe e m < M) do
6      coloca v_m no contêiner atual
7      m := m + 1
8    end while
9  end while
```

Qual a qualidade desse algoritmo? É um algoritmo de aproximação? Caso sim, qual a taxa de aproximação dele? Caso não, por quê?

Exercício 3.4

Prof. Rapidez propõe o seguinte pré-processamento para o algoritmo SAT-R de aproximação para MAX-SAT (página 113): Caso a instância contém claúsulas com um único literal, vamos escolher uma delas, definir uma atribuição parcial que satisfazê-la, e eliminar a variável correspondente. Repetindo esse procedimento, obtemos uma instância cujas claúsulas tem 2 ou mais literais. Assim, obtemos $l \geq 2$ na análise do algoritmo, o podemos garantir que $E[X] \geq 3n/4$, i.e. obtemos uma 4/3-aproximação.
Esta análise é correto ou não?

4. Algoritmos randomizados

Um algoritmo randomizado usa *eventos aleatórios* na sua execução. Modelos computacionais adequadas são máquinas de Turing probabilísticas – mais usadas na área de complexidade – ou máquinas RAM com um comando `random(S)` que retorne um elemento aleatório do conjunto S.
Veja alguns exemplos de probabilidades:

- Probabilidade morrer caindo da cama: $1/2 \times 10^6$ (Roach e Pieper, 2007).
- Probabilidade acertar 6 números de 60 na mega-sena: $1/50063860$.
- Probabilidade que a memória falha: em memória moderna temos 1000 FIT/MBit, i.e. 6×10^{-7} erros por segundo num memória de 256 MB.[1]
- Probabilidade que um meteorito destrói um computador em cada milissegundo: $\geq 2^{-100}$ (supondo que cada milênio ao menos um meteorito destrói uma área de $100\,m^2$).

Portanto, um algoritmo que retorna uma resposta falsa com baixa probabilidade é aceitável. Em retorno um algoritmo randomizado frequentemente é

- mais simples;
- mais eficiente: para alguns problemas, um algoritmo randomizado é o mais eficiente conhecido;
- mais robusto: algoritmos randomizados podem ser menos dependente da distribuição das entradas.
- a única alternativa: para alguns problemas, conhecemos só algoritmos randomizados.

4.1. Teoria de complexidade

Classes de complexidade

[1] FIT é uma abreviação de "failure-in-time" e é o número de erros cada 10^9 segundos. Para saber mais sobre erros em memória veja (Terrazon, 2004).

Definição 4.1
Seja Σ algum alfabeto e $R(\alpha, \beta)$ a classe de linguagens $L \subseteq \Sigma^*$ tal que existe um algoritmo de decisão em tempo polinomial A que satisfaz

- $x \in L \Rightarrow \Pr(A(x) = \text{sim}) \geq \alpha$.
- $x \notin L \Rightarrow \Pr(A(x) = \text{não}) \geq \beta$.

(A probabilidade é sobre todas sequências de bits aleatórios r. Como o algoritmo executa em tempo polinomial no tamanho da entrada $|x|$, o número de bits aleatórios $|r|$ é polinomial em $|x|$ também.)
Com isso podemos definir

- a classe $RP := R(1/2, 1)$ (randomized polynomial), dos problemas que possuem um algoritmo com erro unilateral (no lado do "sim"); a classe $co - RP = R(1, 1/2)$ consiste dos problemas com erro no lado de "não";
- a classe $ZPP := RP \cap co - RP$ (zero-error probabilistic polynomial) dos problemas que possuem algoritmo randomizado sem erro;
- a classe $PP := \bigcup_{\epsilon \in (0, 1/2]} R(1/2 + \epsilon, 1/2 + \epsilon)$ (probabilistic polynomial), dos problemas com erro $1/2 + \epsilon$ nos dois lados; e
- a classe $BPP := R(2/3, 2/3)$ (bounded-error probabilistic polynomial), dos problemas com erro $1/3$ nos dois lados.

Algoritmos que respondem corretamente somente com uma certa probabilidade também são chamados do tipo *Monte Carlo*, enquanto algoritmos que usam randomização somente internamente, mas respondem sempre corretamente são do tipo *Las Vegas*.

Exemplo 4.1 (Teste de identidade de polinomios)
Dado dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ de grau máximo d, como saber se $p(x) \equiv q(x)$? Caso temos os dois na forma canônica $p(x) = \sum_{0 \leq i \leq d} p_i x^i$ ou na forma fatorada $p(x) = \prod_{1 \leq i \leq d} (x - r_i)$ isso é simples responder por comparação de coeficientes em tempo $O(n)$. E caso contrário? Converter para a forma canônica pode custar $\Theta(d^2)$ multiplicações. Uma abordagem randomizada é vantajosa, se podemos avaliar o polinômio mais rápido (por exemplo em $O(d)$):

```
1  identico(p,q) :=
2    Seleciona um número aleatório r no intervalo [1,100d].
3    Caso p(r) = q(r) retorne ``sim''.
4    Caso p(r) ≠ q(r) retorne ``não''.
```

Caso $p(x) \equiv q(x)$, o algoritmo responde "sim" com certeza. Caso contrário a resposta pode ser errada, se $p(r) = q(r)$ por acaso. Qual a probabilidade disso? $p(x) - q(x)$ é um polinômio de grau d e possui no máximo d raízes. Portanto, a probabilidade de encontrar um r tal que $p(r) = q(r)$, caso $p \not\equiv q$ é $d/100d = 1/100$. Isso demonstra que o teste de identidade pertence à classe $\mathsf{co-RP}$. ◊

Observação 4.1
É uma pergunta em aberto se o teste de identidade pertence a P. ◊

4.1.1. Amplificação de probabilidades

Caso não estamos satisfeitos com a probabilidade de $1/100$ no exemplo acima, podemos repetir o algoritmo k vezes, e responder "sim" somente se todas k repetições responderam "sim". A probabilidade erradamente responder "não" para polinômios idênticos agora é $(1/100)^k$, i.e. ela diminui exponencialmente com o número de repetições.
Essa técnica é uma *amplificação* da probabilidade de obter a solução correta. Ela pode ser aplicada para melhorar a qualidade de algoritmos em todas classes "Monte Carlo". Com um número constante de repetições, obtemos uma probabilidade baixa nas classes RP, $\mathsf{co-RP}$ e BPP. Isso não se aplica a PP: é possível que ϵ diminui exponencialmente com o tamanho da instância. Um exemplo de amplificação de probabilidade encontra-se na prova do teorema 4.6.

Teorema 4.1
$R(\alpha, 1) = R(\beta, 1)$ para $0 < \alpha, \beta < 1$.

Prova. Sem perda de generalidade seja $\alpha < \beta$. Claramente $R(\beta, 1) \subseteq R(\alpha, 1)$. Supõe que A é um algoritmo que testemunha $L \in R(\alpha, 1)$. Execute A no máximo k vezes, respondendo "sim" caso A responde "sim" em alguma iteração e "não" caso contrário. Chama esse algoritmo A'. Caso $x \notin L$ temos $\Pr(A'(x) = \text{"não"}) = 1$. Caso $x \in L$ temos $\Pr(A'(x) = \text{"sim"}) \geq 1 - (1 - \alpha)^k$, logo para $k \geq \ln(1 - \beta)/\ln(1 - \alpha)$, $\Pr(A'(x) = \text{"sim"}) \geq \beta$. ■

Corolário 4.1
$RP = R(\alpha, 1)$ para $0 < \alpha < 1$.

Teorema 4.2
$R(\alpha, \alpha) = R(\beta, \beta)$ para $1/2 < \alpha, \beta$.

Prova. Sem perda de generalidade seja $\alpha < \beta$. Claramente $R(\beta, \beta) \subseteq R(\alpha, \alpha)$.

Supõe que A é um algoritmo que testemunha $L \in \mathsf{R}(\alpha, \alpha)$. Executa A k vezes, responde "sim" caso a maioria de respostas obtidas foi "sim", e "não" caso contrário. Chama esse algoritmo A'. Para $x \in L$ temos

$$\Pr(A'(x) = \text{"sim"}) = \Pr(A(x) = \text{"sim"} \geq \lfloor k/2 \rfloor + 1 \text{ vezes}) \geq 1 - e^{-2k(\alpha - 1/2)^2}$$

e para $k \geq \ln(\beta - 1)/2(\alpha - 1/2)^2$ temos $\Pr(A'(x) = \text{"sim"}) \geq \beta$. Similarmente, para $x \notin L$ temos $\Pr(A'(x) = \text{"não"}) \geq \beta$. Logo $L \in \mathsf{R}(\beta, \beta)$. ■

Corolário 4.2
$\mathsf{BPP} = \mathsf{R}(\alpha, \alpha)$ para $1/2 < \alpha$.

Observação 4.2
Os resultados acima são válidos ainda caso o erro dimiui polinomialmente com o tamanho da instância, i.e. $\alpha, \beta \geq n^{-c}$ no caso do teorema 4.1 e $\alpha, \beta \geq 1/2 + n^{-c}$ no caso do teorema 4.2 para um constante c (ver por exemplo Arora e Barak (2009)). ◊

4.1.2. Relação entre as classes

Duas caracterizações alternativas de ZPP

Definição 4.2
Um algoritmo A é *honesto* se

i) ele responde ou "sim", ou "não" ou "não sei",

ii) $\Pr(A(x) = \text{não sei}) \leq 1/2$, e

iii) no caso ele responde, ele não erra, i.e., para x tal que $A(x) \neq$ "não sei" temos $A(x) =$ "sim" $\iff x \in L$.

Uma linguagem é honesta caso ela possui um algoritmo honesto. Com isso também podemos falar da classe das linguagens honestas.

Teorema 4.3
ZPP é a classe das linguagens honestas.

Lema 4.1
Caso $L \in \mathsf{ZPP}$ existe um algoritmo um algoritmo honesto para L.

Prova. Para um $L \in \mathsf{ZPP}$ existem dois algoritmos $A_1 \in \mathsf{RP}$ e $A_2 \in \mathsf{co-RP}$. Vamos construir um algoritmo

```
1 if A1(x) = ``não'' e A2(x) = ``não'' then
2   return ``não''
3 else if A1(x) = ``não'' e A2(x) = ``sim'' then
4   return ``não sei''
5 else if A1(x) = ``sim'' e A2(x) = ``não'' then
6   { caso impossível }
7 else if A1(x) = ``sim'' e A2(x) = ``sim'' then
8   return ``sim''
9 end if
```

O algoritmo responde corretamente "sim" e "não", porque um dos dois algoritmos não erra. Qual a probabilidade do segundo caso? Para $x \in L$, $\Pr(A_1(x) = \text{"não"} \wedge A_2(x) = \text{"sim"}) \leq 1/2 \times 1 = 1/2$. Similarmente, para $x \notin L$, $\Pr(A_1(x) = \text{"não"} \wedge A_2(x) = \text{"sim"}) \leq 1 \times 1/2 = 1/2$. ■

Lema 4.2
Caso L possui um algoritmo honesto $L \in \mathsf{RP}$ e $L \in \mathsf{co}-\mathsf{RP}$.

Prova. Seja A um algoritmo honesto. Constrói outro algoritmo que sempre responde "não" caso A responde "não sei", e senão responde igual. No caso de $\mathsf{co}-\mathsf{RP}$ analogamente constrói um algoritmos que responde "sim" nos casos "não sei" de A. ■

Definição 4.3
Um algoritmo A é *sem falha* se ele sempre responde "sim" ou "não" corretamente em *tempo polinomial esperado*. Com isso podemos também falar de linguagens sem falha e a classe das linguagens sem falha.

Teorema 4.4
ZPP é a classe das linguagens sem falha.

Lema 4.3
Caso $L \in \mathsf{ZPP}$ existe um algoritmo sem falha para L.

Prova. Sabemos que existe um algoritmo honesto para L. Repete o algoritmo honesto até encontrar um "sim" ou "não". Como o algoritmo honesto executa em tempo polinomial $p(n)$, o tempo esperado desse algoritmo ainda é polinomial:

$$\sum_{k>0} k2^{-k}p(n) \leq 2p(n)$$

■

Lema 4.4
Caso L possui um algoritmo A sem falha, $L \in \mathsf{RP}$ e $L \in \mathsf{co}-\mathsf{RP}$.

Prova. Caso A tem tempo esperado $p(n)$ executa ele para um tempo $2p(n)$. Caso o algoritmo responde, temos a resposta certa. Caso contrário, responde "sim". Pela desigualdade de Markov temos uma resposta com probabilidade $\Pr(T \geq 2p(n)) \leq p(n)/2p(n) = 1/2$. Isso mostra que existe um algoritmo honesto para L, e pelo lema 4.2 $L \in \mathsf{RP}$. O argumento para $L \in \mathsf{co}-\mathsf{RP}$ é similar. ■

Mais relações

Teorema 4.5
$\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{NP}$ e $\mathsf{co}-\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{co}-\mathsf{NP}$

Prova. Supõe que temos um algoritmo em RP para algum problema L. Podemos, não-deterministicamente, gerar todas sequências r de bits aleatórios e responder "sim" caso alguma execução encontra "sim". O algoritmo é correto, porque caso para um $x \notin L$, não existe uma sequência aleatória r tal que o algoritmo responde "sim". A prova do segundo caso é similar. ■

Teorema 4.6
$\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{BPP}$ e $\mathsf{co}-\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{BPP}$.

Prova. Seja A um algoritmo para $L \in \mathsf{RP}$. Constrói um algoritmo A'

```
1 if A(x) = ``não'' e A(x) = ``não'' then
2   return ``não''
3 else
4   return ``sim''
5 end if
```

Caso $x \notin L$, $\Pr(A'(x) = \text{"não"}) = \Pr(A(x) = \text{"não"} \wedge A(x) = \text{"não"}) = 1 \times 1 = 1$. Caso $x \in L$,

$$\begin{aligned}\Pr(A'(x) = \text{"sim"}) &= 1 - \Pr(A'(x) = \text{"não"}) = 1 - \Pr(A(x) = \text{"não"} \wedge A(x) = \text{"não"} \\ &\geq 1 - 1/2 \times 1/2 = 3/4 > 2/3.\end{aligned}$$

(Observe que para k repetições de A obtemos $\Pr(A'(x) = \text{"sim"}) \geq 1 - 1/2^k$, i.e., o erro diminui exponencialmente com o número de repetições.) O argumento para $\mathsf{co}-\mathsf{RP}$ é similar. ■

Relação com a classe NP e abundância de testemunhas Lembramos que a classe NP contém problemas que permitem uma verificação de uma solução em tempo polinomial. Não-determinísticamente podemos "chutar" uma solução e verificá-la. Se o número de soluções positivas de cada instância é mais que a metade do número total de soluções, o problema pertence a RP: podemos

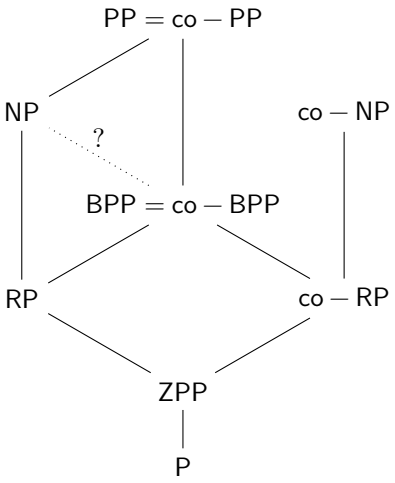


Figura 4.1.: Relações entre classes de complexidade para algoritmos randomizados.

gerar uma solução aleatória e testar se ela possui a característica desejada. Uma problema desse tipo possui uma *abundância de testemunhas*. Isso demonstra a importância de algoritmos randomizados. O teste de equivalência de polinômios acima é um exemplo de abundância de testemunhas.

4.2. Seleção

O algoritmo determinístico para selecionar o k-ésimo elemento de uma sequencia não ordenada $x_1, \ldots, x_n$ discutido na seção A.1 (página 161) pode ser simplificado usando randomização: escolheremos um elemento pivô $m = x_i$ aleatório. Com isso o algoritmo A.1 fica mais simples:

Algoritmo 4.1 (Seleção randomizada)
Entrada Números $x_1, \ldots, x_n$, posição k.

Saída O k-ésimo maior número.

```
1  S(k,{x_1,...,x_n}) :=
2    if n ≤ 1
3      calcula e retorne o k-ésimo elemento
```

```
4    end if
5    m := x_i para um i ∈ [n] aleatória
6    L := {x_i | x_i < m, 1 ≤ i ≤ n}
7    R := {x_i | x_i ≥ m, 1 ≤ i ≤ n}
8    i := |L| + 1
9    if i = k then
10     return m
11   else if i > k then
12     return S(k, L)
13   else
14     return S(k − i, R)
15   end if
```

Para determinar a complexidade podemos observar que com probabilidade $1/n$ temos $|L| = i$ e $|R| = n - i$ e o caso pessimista é uma chamada recursiva com $\max\{i, n-i\}$ elementos. Logo, com custo cn para particionar o conjunto e os testes temos

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \sum_{i\in[0,n]} 1/n T(\max\{n-i,i\}) + cn \\ &= 1/n\left(\sum_{i\in[0,\lfloor n/2\rfloor]} T(n-i) + \sum_{i\in[\lceil n/2\rceil,n]} T(i)\right) + cn \\ &2/n \sum_{i\in[0,\lfloor n/2\rfloor]} T(n-i) + cn \end{aligned}$$

Separando o termo $T(n)$ do lado direito obtemos

$$\begin{aligned} (1-2/n)T(n) &\leq 2/n \sum_{i\in[1,\lfloor n/2\rfloor]} T(n-i) + cn \\ \iff T(n) &\leq \frac{2}{n-2}\left(\sum_{i\in[1,\lfloor n/2\rfloor]} T(n-i) + cn^2/2\right). \end{aligned}$$

Provaremos por indução que $T(n) \leq c'n$ para uma constante c'. Para um $n \leq n_0$ o problema pode ser claramente resolvido em tempo constante (por exemplo em $O(n_0 \log n_0)$ via ordenação). Logo, supõe que $T(i) \leq c'i$ para

$i < n$. Demonstraremos que $T(n) \leq c'n$. Temos

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \frac{2}{n-2}\left(\sum_{i\in[1,\lfloor n/2\rfloor]} T(n-i) + cn^2/2\right) \\ &\leq \frac{2c'}{n-2}\left(\sum_{i\in[1,\lfloor n/2\rfloor]} n - i + cn^2/2c'\right) \\ &= \frac{2c'}{n-2}\left((2n - \lfloor n/2\rfloor - 1)\lfloor n/2\rfloor/2 + cn^2/2c'\right) \end{aligned}$$

e com $2n - \lfloor n/2\rfloor - 1 \leq 3/2n$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c'}{n-2}(3/4n^2 + cn^2/c') \\ &= c'n\frac{(3/4 + c/c')n}{n-2} \end{aligned}$$

Para $n \geq n_0 := 16$ temos $n/(n-2) \leq 8/7$ e com um $c' > 8c$ temos

$$T(n) \leq c'n(3/4 + 1/8)8/7 \leq c'n.$$

4.3. Corte mínimo

Corte mínimo

Entrada Grafo não-direcionado $G = (V, A)$ com pesos $c : A \to \mathbb{Z}_+$ nas arestas.

Solução Uma partição $V = S \cup (V \setminus S)$.

Objetivo Minimizar o peso do corte $\sum_{\substack{\{u,v\}\in A \\ u\in S, v\in V\setminus S}} c_{\{u,v\}}$.

Soluções determinísticas:

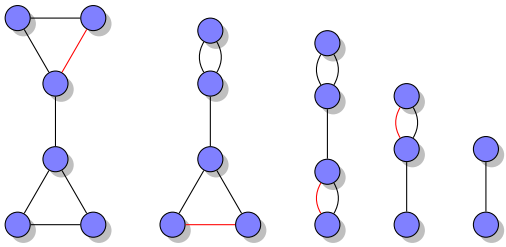
- Calcular a árvore de Gomory-Hu: a aresta de menor peso define o corte mínimo.
- Calcular o corte mínimo (via fluxo máximo) entre um vértice fixo $s \in V$ e todos outros vértices: o menor corte encontrado é o corte mínimo.

Custo em ambos casos: $O(n)$ aplicações de um algoritmo de fluxo máximo, i.e. $O(mn^2)$ usando o algoritmo de Orlin.

Solução randomizada para pesos unitários No que segue supomos que os pesos são unitários, i.e. $c_a = 1$ para $a \in A$. Uma abordagem simples é baseada na seguinte observação: se escolhemos uma aresta que não faz parte de um corte mínimo, e contraímo-la (i.e. identificamos os vértices adjacentes), obtemos um grafo menor, que ainda contém o corte mínimo. Se escolhemos uma aresta randomicamente, a probabilidade de por acaso escolher uma aresta de um corte mínimo é baixa.

```
1  cmr(G) :=
2    while G possui mais que dois vértices
3      escolhe uma aresta {u,v} aleatoriamente
4      identifica u e v em G
5    end while
6    return o corte definido pelos dois vértices em G
```

Exemplo 4.2
Uma sequencia de contrações (das arestas vermelhas).



◊

Dizemos que uma aresta "sobrevive" uma contração, caso ele não foi contraído.

Lema 4.5
A probabilidade que os k arestas de um corte mínimo sobrevivem $n - n'$ contrações (de n para n' vértices) é $\Omega((n'/n)^2)$.

Prova. Como o corte mínimo é k, cada vértice possui grau pelo menos k, e portanto o número de arestas após da iteração $0 \leq i < n - n'$ e maior ou igual a $k(n-i)/2$ (com a convenção que a "iteração 0" produz o grafo inicial). Supondo que as k arestas do corte mínimo sobreviveram a iteração i, a probabilidade de não sobreviver a próxima iteração é pelo menos $k/(k(n-i)/2) = 2/(n-i)$. Logo, a probabilidade do corte sobreviver todas iterações é

pelo menos

$$\prod_{0\le i<n-n'} 1-\frac{2}{n-i} = \prod_{0\le i<n-n'} \frac{n-i-2}{n-i}$$
$$= \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n'-1)}{n(n-1)\cdots(n'+1)} = \frac{n'(n'-1)}{n(n-1)} = \Omega((n'/n)^2).$$

■

Teorema 4.7
Dado um corte mínimo C de tamanho k, a probabilidade do algoritmo cmr retornar C é $\Omega(n^{-2})$.

Prova. Caso o grafo possui n vértices, o algoritmo termina em $n-2$ iterações: podemos aplicar o lema acima com $n' = 2$. ■

Observação 4.3
O que acontece se repetimos o algoritmo algumas vezes? Seja C_i uma variável que indica se o corte mínimo foi encontrado na repetição i. Temos $\Pr(C_i = 1) \ge 2n^{-2}$ e portanto $\Pr(C_i = 0) \le 1 - 2n^{-2}$. Para kn^2 repetições, vamos encontrar $C = \sum C_i$ cortes mínimos com probabilidade

$$\Pr(C \ge 1) = 1 - \Pr(C = 0) \ge 1 - (1-2n^{-2})^{kn^2} \ge 1 - e^{-2k}.$$

Para $k = \log n$ obtemos $\Pr(C \ge 1) \ge 1 - n^{-2}$. ◊

Logo, ao repetir o algoritmo $n^2 \log n$ vezes e retornar o menor corte encontrado, achamos o corte mínimo com probabilidade razoável. Se a implementação realiza uma contração em tempo $O(n)$ o algoritmo possui complexidade $O(n^2)$ e com as repetições em total $O(n^4 \log n)$.

Implementação de contrações Para garantir a complexidade acima, uma contração tem que ser implementada em $O(n)$. Isso é possível tanto na representação por uma matriz de adjacência, quanto na representação pela listas de adjacência. A contração de dois vértices adjacentes resulta em um novo vértice, que é adjacente aos vizinhos dos dois. Na contração arestas de um vértice com si mesmo são removidas. Múltiplas arestas entre dois vértices tem que ser mantidas para garantir a corretude do algoritmo.

Um algoritmo melhor O problema principal com o algoritmo acima é que nas últimas iterações, a probabilidade de contrair uma aresta do corte mínimo é grande. Para resolver esse problema, executaremos o algoritmo duas vezes para instâncias menores, para aumentar a probabilidade de não contrair o corte mínimo. Define $f(n) = \left\lceil 1 + n/\sqrt{2} \right\rceil$.

```
1  cmr2(G) :=
2    if (G possui menos que 6 vértices)
3      determina o corte mínimo C por exaustão
4      return C
5    else
6      n' := f(n)
7      seja G1 o resultado de n − n' contrações em G
8      seja G2 o resultado de n − n' contrações em G
9      C1 :=cmr2(G1)
10     C2 :=cmr2(G2)
11     return o menor dos dois cortes C1 e C2
12   end if
```

Esse algoritmo possui complexidade de tempo $O(n^2 \log n)$ e encontra um corte mínimo com probabilidade $\Omega(1/\log n)$.

Lema 4.6
A probabilidade de um corte mínimo sobreviver $n - f(n)$ contrações é pelo menos $1/2$.

Prova. Pelo lema 4.5 a probabilidade é pelo menos

$$\frac{f(n)(f(n)-1)}{n(n-1)} \geq \frac{(1+n/\sqrt{2})(n/\sqrt{2})}{n(n-1)} = \frac{\sqrt{2}+n}{2(n-1)} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

■

Seja $P(n)$ a probabilidade que um corte com k arestas sobrevive caso o grafo possui n vértices. Temos

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{o corte sobrevive em } G_1) &\geq 1/2\, P(f(n)) \\
\Pr(\text{o corte sobrevive em } G_2) &\geq 1/2\, P(f(n)) \\
\Pr(\text{o corte não sobrevive em } G_1 \text{ nem } G_2) &\leq (1 - 1/2P(f(n)))^2 \\
P(n) = \Pr(\text{o corte sobrevive em } G_1 \text{ ou } G_2) &\geq 1 - (1 - 1/2P(f(n)))^2 \\
&= P(f(n)) - 1/4P(f(n))^2
\end{aligned}$$

Para resolver essa recorrência, define $Q(k) = P(\sqrt{2}^k)$ com base $Q(0) = 1$ para obter a recorrência simplificada

$$\begin{aligned}
Q(k+1) = P(\sqrt{2}^{k+1}) = P(\left\lceil 1 + \sqrt{2}^k \right\rceil) - 1/4P(\left\lceil 1 + \sqrt{2}^k \right\rceil)^2 \\
\approx P(\sqrt{2}^k) - P(\sqrt{2}^k)^2/4 = Q(k) - Q(k)^2/4
\end{aligned}$$

e depois $R(k) = 4/Q(k) - 1$ com base $R(0) = 3$ para obter

$$\frac{4}{R(k+1)+1} = \frac{4}{R(k)+1} - \frac{4}{(R(k)+1)^2} \iff R(k+1) = R(k) + 1 + 1/R(k).$$

$R(k)$ satisfaz

$$k < R(k) < k + H_{k-1} + 3$$

Prova. Por indução. Para $k = 1$ temos $1 < R(1) = 13/3 < 1 + H_0 + 3 = 5$. Caso a HI está satisfeito, temos

$$R(k+1) = R(k) + 1 + 1/R(k) > R(k) + 1 > k + 1$$
$$R(k+1) = R(k) + 1 + 1/R(k) < k + H_{k-1} + 3 + 1 + 1/k = (k+1) + H_k + 3$$

■

Logo, $R(k) = k + \Theta(\log k)$, e com isso $Q(k) = \Theta(1/k)$ e finalmente $P(n) = \Theta(1/\log n)$.
Para determinar a complexidade do algoritmo cmr2 observe que temos $O(\log n)$ níveis de recursão e cada contração pode ser feita em tempo $O(n^2)$, portanto

$$T_n = 2T(f(n)) + O(n^2).$$

Aplicando o teorema de Akra-Bazzi obtemos a equação característica $2(1/\sqrt{2})^p = 1$ com solução $p = 2$ e

$$T_n \in \Theta(n^2(1 + \int_1^n \frac{cu^2}{u^3} du)) = \Theta(n^2 \log n).$$

4.4. Teste de primalidade

Um problema importante na criptografia é encontrar números primos grandes (p.ex. RSA). Escolhendo um número n aleatório, qual a probabilidade de n ser primo?

Teorema 4.8 (Hadamard (1896), Vallée Poussin (1896))
(Teorema dos números primos.)
Para $\pi(n) = |\{p \leq n \mid p \text{ primo}\}|$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n} = 1.$$

(Em particular $\pi(n) = \Theta(n/\ln n)$.)

Portanto, a probabilidade de um número aleatório no intervalo $[2, n]$ ser primo assintoticamente é somente $1/\ln n$. Então para encontrar um número primo, temos que testar se n é primo mesmo. Observe que isso não é igual a fatoração de n. De fato, temos testes randomizados (e determinísticos) em tempo polinomial, enquanto não sabemos fatorar nesse tempo. Uma abordagem simples é testar todos os divisores:

```
1  Primo1(n) :=
2    for i = 2,3,5,7,..., ⌊√n⌋ do
3      if i|n return ``Não''
4    end for
5    return ``Sim''
```

O tamanho da entrada n é $t = \log n$ bits, portanto o número de iterações é $\Theta(\sqrt{n}) = \Theta(2^{t/2})$ e a complexidade $\Omega(2^{t/2})$ (mesmo contando o teste de divisão com $O(1)$) desse algoritmo é exponencial. Para testar a primalidade mais eficiente, usaremos uma característica particular dos números primos.

Teorema 4.9 (Fermat, Euler)
Para p primo e $a \geq 0$ temos

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Prova. Por indução sobre a. Base: evidente. Seja $a^p \equiv a$. Temos

$$(a+1)^p = \sum_{0 \leq i \leq p} \binom{p}{i} a^i$$

e para $0 < i < p$

$$p | \binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}$$

porque p é primo. Portanto $(a+1)^p \equiv a^p + 1$ e

$$(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p + 1 - (a+1) = a^p - a \equiv 0.$$

(A última identidade é a hipótese da indução.) ■

Definição 4.4
Para $a, b \in \mathbb{Z}$ denotamos com (a, b) o maior divisor em comum (MDC) de a e b. No caso $(a, b) = 1$, a e b são números *coprimos*.

Teorema 4.10 (Divisão modulo p)
Caso p é primo e $(b, p) = 1$

$$ab \equiv cb \mod p \Rightarrow a \equiv c \mod p.$$

(Em palavras: Numa identidade modulo p podemos dividir por números coprimos com p.)

Prova.

$$\begin{aligned} ab \equiv cd &\iff \exists k\, ab + kp = cb \\ &\iff \exists k\, a + kp/b = c \end{aligned}$$

Como $a, c \in \mathbb{Z}$, temos $kp/b \in \mathbb{Z}$ e $b|k$ ou $b|p$. Mas $(b, p) = 1$, então $b|k$. Definindo $k' := k/b$ temos $\exists k'\, a + k'p = c$, i.e. $a \equiv c$. ■

Logo, para p primo e $(a, p) = 1$ (em particular se $1 \leq a < p$)

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p. \tag{4.1}$$

Um teste melhor então é

```
1  Primo2(n) :=
2    seleciona a ∈ [1, n − 1] aleatoriamente
3    if (a, n) ≠ 1 return ``Não''
4    if a^{n−1} ≡ 1 return ``Sim''
5    return ``Não''
```

Complexidade: Uma multiplicação e divisão com $\log n$ dígitos é possível em tempo $O(\log^2 n)$. Portanto, o primeiro teste (o algoritmo de Euclides em $\log n$ passos) pode ser feito em tempo $O(\log^3 n)$ e o segundo teste (exponenciação modular) é possível implementar com $O(\log n)$ multiplicações (exercício!).
Corretude: O caso de uma resposta "Não" é certo, porque n não pode ser primo. Qual a probabilidade de falhar, i.e. do algoritmo responder "Sim", com n composto? O problema é que o algoritmo falha no caso de *números Carmichael*.

Definição 4.5
Um número composto n que satisfaz $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$ é um *número pseudo-primo com base* a. Um *número Carmichael* é um número pseudo-primo para qualquer base a com $(a, n) = 1$.

Os primeiros números Carmichael são $561 = 3 \times 11 \times 17$, 1105 e 1729 (veja OEIS A002997). Existe um número infinito deles:

Teorema 4.11 (Alford, Granville e C. Pomerance (1994))
Seja $C(n)$ o número de números Carmichael até n. Assintoticamente temos $C(n) > n^{2/7}$.

Exemplo 4.3
$C(n)$ até 10^{10} (OEIS A055553):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C(10^n)$	0	0	1	7	16	43	105	255	646	1547
$\lceil (10^n)^{2/7} \rceil$	2	4	8	14	27	52	100	194	373	720

· ◊

Caso um número n não é primo, nem número de Carmichael, mais que $n/2$ dos $a \in [1, n-1]$ com $(a, n) = 1$ não satisfazem (4.1) ou seja, com probabilidade $> 1/2$ acharemos um testemunha que n é composto. O problema é que no caso de números Carmichael não temos garantia.

Teorema 4.12 (Raiz modular)
Para p primo temos

$$x^2 \equiv 1 \mod p \Rightarrow x \equiv \pm 1 \mod p.$$

O teste de Miller-Rabin usa essa característica para melhorar o teste acima. Podemos escrever $n - 1 = 2^t u$ para um u ímpar. Temos $a^{n-1} = (a^u)^{2^t} \equiv 1$. Portanto, se $a^{n-1} \equiv 1$,

$$\text{Ou } a^u \equiv 1 \mod p \text{ ou existe um menor } i \in [0, t] \text{ tal que } (a^u)^{2^i} \equiv 1$$

Caso p é primo, $\sqrt{(a^u)^{2^i}} = (a^u)^{2^{i-1}} \equiv -1$ pelo teorema (4.12) e a minimalidade de i (que exclui o caso $\equiv 1$). Por isso:

Definição 4.6
Um número n é um *pseudo-primo forte com base* a caso

$$\text{Ou } a^u \equiv 1 \mod p \text{ ou existe um menor } i \in [0, t-1] \text{ tal que } (a^u)^{2^i} \equiv -1 \tag{4.2}$$

```
1  Primo3(n) :=
2    seleciona a ∈ [1, n − 1] aleatoriamente
3    if (a, n) ≠ 1 return ``Não''
4    seja n − 1 = 2^t u
5    if a^u ≡ 1 return ``Sim''
6    if (a^u)^{2^i} ≡ −1 para um i ∈ [0, t − 1] return ``Sim''
7    return ``Não''
```

Teorema 4.13 (Monier (1980) e Rabin (1980))
Caso n e composto e ímpar, mais que 3/4 dos $a \in [1, n-1]$ com $(a, n) = 1$ não satisfazem o critério (4.2) acima.

Portanto com k testes, a probabilidade de falhar $\Pr(\text{Sim} \mid n \text{ composto}) \leq (1/4)^k = 2^{-2k}$. De fato a probabilidade é menor:

Teorema 4.14 (Damgård, Landrock e Carl Pomerance, 1993)
A probabilidade de um único teste falhar para um número com k bits e $\leq k^2 4^{2-\sqrt{k}}$.

Exemplo 4.4
Para $n \in [2^{499}, 2^{500}-1]$ a probabilidade de não detectar um n composto com um único teste é menor que

$$499^2 \times 4^{2-\sqrt{499}} \approx 2^{-22}.$$

$\Diamond$

Teste determinístico O algoritmo pode ser convertido em um algoritmo determinístico, testando pelo menos $1/4$ dos a com $(a, n) = 1$. De fato, para o menor testemunho $w(n)$ de um número n ser composto temos

$$\text{Se o HGR é verdade: } w(n) < 2\log^2 n \tag{4.3}$$

com HGR a hipótese generalizada de Riemann (uma conjetura aberta). Supondo HGR, obtemos um algoritmo determinístico com complexidade $O(\log^5 n)$. Em 2002, Agrawal, Kayal e Saxena (2004) descobriram um algoritmo determinístico (sem a necessidade da HGR) em tempo $\tilde{O}(\log^{12} n)$ que depois foi melhorado para $\tilde{O}(\log^6 n)$.
Para testar: `http://www.jjam.de/Java/Applets/Primzahlen/Miller_Rabin.html`.

4.5. Exercícios

Exercício 4.1
Encontre um primo p e um valor b tal que a identidade do teorema 4.10 não é correta.

Exercício 4.2
Encontre um número p não primo tal que a identidade do teorema 4.12 não é correta.

5. Complexidade e algoritmos parametrizados

A complexidade de um problema geralmente é resultado de diversos elementos. Um *algoritmo parametrizado* separa explicitamente os elementos que tornam um problema difícil, dos que são simples de tratar. A análise da *complexidade parametrizada* quantifica essas partes separadamente. Por isso, a complexidade parametrizada é chamada uma "complexidade de duas dimensões".

Exemplo 5.1
O problema de satisfatibilidade (SAT) é NP-completo, i.e. não conhecemos um algoritmo cuja complexidade cresce somente polinomialmente com o tamanho da entrada. Porém, a complexidade deste problema cresce principalmente com o número de variáveis, e não com o tamanho da entrada: com k variáveis e entrada de tamanho n solução trivial resolve o problema em tempo $O(2^k n)$. Em outras palavras, para *parâmetro* k fixo, a complexidade é linear no tamanho da entrada. ◊

Definição 5.1
Um problema que possui um parâmetro $k \in \mathbb{N}$ (que depende da instância) e permite um algoritmo de complexidade $f(k)|x|^{O(1)}$ para entrada x e com f uma função arbitrária, se chama *tratável por parâmetro fixo* (ingl. fixed-parameter tractable, fpt). A classe de complexidade correspondente é FPT.

Um problema tratável por parâmetro fixo se torna tratável na prática, se o nosso interesse são instâncias com parâmetro pequeno. É importante observar que um problema permite diferentes parametrizações. O objetivo de projeto de algoritmos parametrizados consiste em descobrir para quais parâmetros que são pequenos na prática o problema possui um algoritmo parametrizado. Neste sentido, o algoritmo parametrizado para SAT não é interessante, porque o número de variáveis na prática é grande.
A seguir consideramos o problema NP-complete de *cobertura de vértices*. Uma versão parametrizada é

---

k-COBERTURA DE VÉRTICES

Instância Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ e um número k[1].

Solução Uma cobertura C, i.e. um conjunto $C \subseteq V$ tal que $\forall a \in A$:

$a \cap C \neq \emptyset$.

Parâmetro O tamanho k da cobertura.

Objetivo Minimizar $|C|$.

Abordagem com força bruta:

```
1  mvc(G = (V, A)) :=
2    if A = ∅ return ∅
3    seleciona aresta {u, v} ∈ A não coberta
4    C1 := {u} ∪ mvc(G \ {u})
5    C2 := {v} ∪ mvc(G \ {v})
6    return a menor entre as coberturas C1 e C2
```

Supondo que a seleção de uma aresta e a redução dos grafos é possível em $O(n)$, a complexidade deste abordagem é dado pela recorrência

$$T_n = 2T_{n-1} + O(n)$$

com solução $T_n = O(2^n)$. Para achar uma solução com no máximo k vértices, podemos podar a árvore de busca definido pelo algoritmo mvc na profundidade k. Isso resulta em

Teorema 5.1
O problema k-cobertura de vértices é tratável por parâmetro fixo em $O(2^k n)$.

Prova. Até o nível k vamos visitar $O(2^k)$ vértices na árvore de busca, cada um com complexidade $O(n)$. ■

O projeto de algoritmos parametrizados frequentemente consiste em

- achar uma parametrização tal que o parte super-polinomial da complexidade é limitada para um parte do problema que depende de um parâmetro k que é pequeno na prática;
- encontrar o melhor algoritmo possível para o parte super-polinomial.

Exemplo 5.2
Considere o algoritmo direto (via uma árvore de busca, ou backtracking) para SAT.

```
1  BT−SAT(φ, α) :=
2    if α é atribuição completa: return φ(α)
```

[1] Introduzimos k na entrada, porque k mede uma característica da solução. Para evitar complexidades artificias, entende-se que k nestes casos é codificado em *unário*.

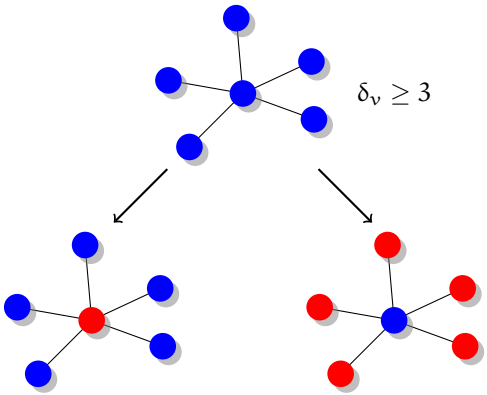


Figura 5.1.: Subproblemas geradas pela decisão da inclusão de um vértice v. Vermelho: vértices selecionadas para a cobertura.

```
3    if alguma cláusula não é satisfeita: return false
4    if BT−SAT(φ, α1) return true
5    return BT-SAT(φ, α0)
```

($\alpha 0$ e $\alpha 1$ denotam extensões de uma atribuição parcial das variáveis.)
Aplicado para 3SAT, das 8 atribuições por cláusula podemos excluir uma que não a satisfaz. Portanto a complexidade de BT-SAT é $O(7^{n/3}) = O(\sqrt[3]{7}^n) = O(1.9129^n)$. (Exagerando – mas não mentindo – podemos dizer que isso é uma aceleração exponencial sobre a abordagem trivial que testa todas 2^n atribuições.)
O melhor algoritmo para 3-SAT possui complexidade $O(1.324^n)$. ◊

Um algoritmo melhor para cobertura de vértices Consequência: O projeto cuidadoso de uma árvore de busca pode melhorar a complexidade. Vamos aplicar isso para o problema de cobertura de vértices.
Um melhor algoritmo para a k-cobertura de vértices pode ser obtido pelas seguintes observações

- Caso o grau máximo Δ de G é 2, o problema pode ser resolvido em tempo $O(n)$, porque G é uma coleção de caminhos simples e ciclos.

- Caso contrário, temos pelo menos um vértice v de grau $\delta_v \geq 3$. Ou esse vértice faz parte da cobertura mínima, ou todos seus vizinhos $N(v)$ (veja figura 5.1).

```
1  mvc'(G) :=
2    if Δ(G) ≤ 2 then
3      determina a cobertura mínima C em tempo O(n)
4      return C
5    end if
6    seleciona um vértice v com grau δ_v ≥ 3
7    C_1 := {v} ∪ mvc'(G \ {v})
8    C_2 := N(v) ∪ mvc'(G \ N(v))
9    return a menor cobertura entre C_1 e C_2
```

O algoritmo resolve o problema de cobertura de vértices mínima de forma exata. Se podamos a árvore de busca após selecionar k vértices obtemos um algoritmo parametrizado para k-cobertura de vértices. O número de vértices nessa árvore é

$$V_i \leq V_{i-1} + V_{i-4} + 1.$$

Lema 5.1
A solução dessa recorrência é $V_i = O(1.3803^i)$.

Teorema 5.2
O problema k-cobertura de vértices é tratável por parâmetro fixo em $O(1.3803^k n)$.

Prova. Considerações acima com trabalho limitado por $O(n)$ por vértice na árvore de busca. ■

Prova. (Do lema acima.) Com o ansatz $V_i \leq c^i$ obtemos uma prova por indução se para um $i \geq i_0$

$$\begin{aligned} & V_i \leq V_{i-1} + V_{i-4} + 1 \leq c^{i-1} + c^{i-4} + 1 \leq c^i \\ \iff\ & c^{i-4}(c^4 - c^3 - 1) \geq 1 \\ \iff\ & c^4 - c^3 - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

(O último passo é justificado porque para $c > 1$ e i_0 suficientemente grande o produto vai ser ≥ 1.) $c^4 - c^3 - 1$ possui uma única raiz positiva ≈ 1.32028 e para $c \geq 1.3803$ temos $c^3 - c^2 - 1 \geq 0$. ■

A. Material auxiliar

Definições

Definição A.1
Uma relação binária R é *polinomialmente limitada* se

$$\exists p \in \mathsf{poly} : \forall (x, y) \in R : |y| \leq p(|x|)$$

Definição A.2 (Pisos e tetos)
Para $x \in \mathbb{R}$ o *piso* $\lfloor x \rfloor$ o maior n mero inteiro menor que x e o *teto* $\lceil x \rceil$ o menor n mero inteiro maior que x. Formalmente

$$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$$
$$\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq x\}$$

O *parte fracion rio* de x $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Observe que o parte fracion rio sempre positivo, por exemplo $\{-0.3\} = 0.7$.

Proposição A.1 (Regras para pisos e tetos)
Pisos e tetos satisfazem

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \tag{A.1}$$
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \tag{A.2}$$

Definição A.3
Uma fun o f *convexa* se ela satisfaz a desigualdade de Jensen

$$f\big(\Theta x + (1-\Theta)y\big) \leq \Theta f(x) + (1-\Theta) f(y). \tag{A.3}$$

Similarmente uma fun o f *concava* caso $-f$ convexo, i.e., ela satisfaz

$$f(\Theta x + (1-\Theta)y) \geq \Theta f(x) + (1-\Theta) f(y). \tag{A.4}$$

Exemplo A.1
Exemplos de fun es convexas s o x^{2k}, $1/x$. Exemplos de fun es concavas s o $\log x$, $\sqrt{x}$. ◊

Proposição A.2
Para $\sum_{i\in[n]}\Theta_i = 1$ e pontos x_i, $i \in [n]$ uma fun o convexa satisfaz

$$f\Big(\sum_{i\in[n]}\Theta_i x_i\Big) \le \sum_{i\in[n]}\Theta_i f(x_i) \tag{A.5}$$

e uma fun o concava

$$f\Big(\sum_{i\in[n]}\Theta_i x_i\Big) \ge \sum_{i\in[n]}\Theta_i f(x_i) \tag{A.6}$$

Prova. Provaremos somente o caso convexo por indu o, o caso concavo sendo similar. Para $n = 1$ a desigualdade trivial, para $n = 2$ ela v lida por defini o. Para $n > 2$ define $\bar{\Theta} = \sum_{i\in[2,n]}\Theta_i$ tal que $\Theta + \bar{\Theta} = 1$. Com isso temos

$$f\Big(\sum_{i\in[n]}\Theta_i x_i\Big) = f\big(\Theta_1 x_1 + \sum_{i\in[2,n]}\Theta_i x_i\big) = f(\Theta_1 x_1 + \bar{\Theta} y)$$

onde $y = \sum_{j\in[2,n]}(\Theta_j/\bar{\Theta})x_j$, logo

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{i\in[n]}\Theta_i x_i\Big) &\le \Theta_1 f(x_1) + \bar{\Theta} f(y) \\ &= \Theta_1 f(x_1) + \bar{\Theta} f\Big(\sum_{j\in[2,n]}(\Theta_j/\bar{\Theta})x_j\Big) \\ &\le \Theta_1 f(x_1) + \bar{\Theta}\sum_{j\in[2,n]}(\Theta_j/\bar{\Theta}) f(x_j) = \sum_{i\in[n]}\Theta_i x_i \end{aligned}$$

■

A.1. Algoritmos

Soluções do problema da mochila com Programação Dinâmica

Mochila máxima (Knapsack)

- Seja $S^*(k, v)$ a solução de tamanho menor entre todas soluções que
  - usam somente itens $S \subseteq [1, k]$ e
  - tem valor exatamente v.

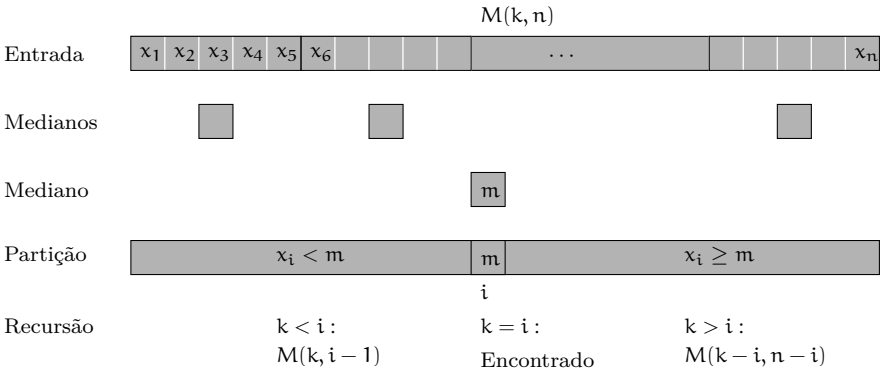


Figura A.1.: Funcionamento do algoritmo recursivo para seleção.

- Temos

$$\begin{aligned} S^*(k,0) &= \emptyset \\ S^*(1,v_1) &= \{1\} \\ S^*(1,v) &= \text{undef} \qquad \text{para } v \neq v_1 \end{aligned}$$

Mochila máxima (Knapsack)

- S^* obedece a recorrência

$$S^*(k,v) = \min_{\text{tamanho}} \begin{cases} S^*(k-1, v-v_k) \cup \{k\} & \text{se } v_k \leq v \text{ e } S^*(k-1,v-v_k) \text{ definido} \\ S^*(k-1,v) \end{cases}$$

- Menor tamanho entre os dois

$$\sum_{i \in S^*(k-1,v-v_k)} t_i + t_k \leq \sum_{i \in S^*(k-1,v)} t_i.$$

- Melhor valor: Escolhe $S^*(n,v)$ com o valor máximo de v definido.
- Tempo e espaço: $O(n \sum_i v_i)$.

Seleção Dado um conjunto de números, o problema da seleção consiste em encontrar o k-ésimo maior elemento. Com ordenação o problema possui solução em tempo $O(n \log n)$. Mas existe um outro algoritmo mais eficiente.

Podemos determinar o mediano de grupos de cinco elementos, e depois o recursivamente o mediano m desses medianos. Com isso, o algoritmo particiona o conjunto de números em um conjunto L de números menores que m e um conjunto R de números maiores que m. O mediano m é na posição $i := |L| + 1$ desta sequência. Logo, caso $i = k$ m é o k-ésimo elemento. Caso $i > k$ temos que procurar o k-ésimo elemento em L, caso $i < k$ temos que procurar o $k - i$-ésimo elemento em R (ver figura A.1).
O algoritmo é eficiente, porque a seleção do elemento particionador m garante que o subproblema resolvido na segunda recursão é no máximo um fator $7/10$ do problema original. Mais preciso, o número de medianos é maior que $n/5$, logo o número de medianos antes de m é maior que $n/10 - 1$, o número de elementos antes de m é maior que $3n/10 - 3$ e com isso o número de elementos depois de m é menor que $7n/10 + 3$. Por um argumento similar, o número de elementos antes de m é também menor que $7n/10 + 3$. Portanto temos um custo no caso pessimista de

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 5 \\ T(\lceil n/5 \rceil) + \Theta(7n/10 + 3) + \Theta(n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e com $5^{-p} + (7/10)^p = 1$ temos $p = \log_2 7 \approx 0.84$ e

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta\left(n^p \left(1 + \int_1^n u^{-p}\, du\right)\right) \\ &= \Theta(n^p(1 + (n^{1-p}/(1-p) - 1/(1-p)))) \\ &= \Theta(c_1 n^p + c_2 n) = \Theta(n). \end{aligned}$$

Algoritmo A.1 (Seleção)
Entrada Números $x_1, \ldots, x_n$, posição k.

Saída O k-ésimo maior número.

```
1  S(k,{x_1,...,x_n}) :=
2    if n ≤ 5
3      calcula e retorne o k-ésimo elemento
4    end if
5    m_i := median(x_{5i+1},...,x_{min(5i+5,n)}) para 0 ≤ i < ⌈n/5⌉.
6    m := S(⌈⌈n/5⌉/2⌉, m_1,...,m_{⌈n/5⌉-1})
7    L := {x_i | x_i < m, 1 ≤ i ≤ n}
8    R := {x_i | x_i ≥ m, 1 ≤ i ≤ n}
9    i := |L| + 1
```

```
10    if i = k then
11      return m
12    else if i > k then
13      return S(k, L)
14    else
15      return S(k − i, R)
16    end if
```

B. Técnicas para a análise de algoritmos

Análise de recorrências

Teorema B.1 (Akra-Bazzi e Leighton)
Dado a recorrência

$$T(x) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } x \leq x_0 \\ \sum_{1 \leq i \leq k} a_i T(b_i x + h_i(x)) + g(x) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com constantes $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$ e funções g, h, tal que

$$|g'(x)| \in O(x^c); \qquad |h_i(x)| \leq x/\log^{1+\epsilon} x$$

para um $\epsilon > 0$ e a constante x_0 e suficientemente grande

$$T(x) \in \Theta\left(x^p \left(1 + \int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$

com p tal que $\sum_{1 \leq i \leq k} a_i b_i^p = 1$.

Teorema B.2 (Graham, Knuth e Patashnik (1988))
Dado a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n \leq \max_{1 \leq i \leq k} d_i \\ \sum_i \alpha_i T(n - d_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

seja α a raiz com a maior valor absoluto com multiplicidade l do *polinômio característico*

$$z^d - \alpha_1 z^{d-d_1} - \cdots - \alpha_k z^{d-d_k}$$

com $d = \max_k d_k$. Então

$$T(n) = \Theta(n^l \alpha^n) = \Theta^*(\alpha^n).$$

Bibliografia

[1] Manindra Agrawal, Neeraj Kayal e Nitin Saxena. "PRIMES is in P". Em: *Annals of Mathematics* 160.2 (2004), pp. 781–793.

[2] W. R. Alford, A. Granville e C. Pomerance. "There are infinitely many Carmichael numbers". Em: *Annals Math.* 140 (1994).

[3] *Algorithm Engineering*. http://www.algorithm-engineering.de. Deutsche Forschungsgemeinschaft.

[4] H. Alt et al. "Computing a maximum cardinality matching in a bipartite graph in time $O(n^{1.5}\sqrt{m \log n})$". Em: *Information Processing Letters* 37 (1991), pp. 237–240.

[5] June Andrews e J. A. Sethian. "Fast marching methods for the continuous traveling salesman problem". Em: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 104.4 (2007). DOI: 10.1073/pnas.0609910104.

[6] Sanjeev Arora e Boaz Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.

[7] Brenda S. Baker. "A new proof for the first fit decreasing bin packing algorithm". Em: *J. Alg.* 6 (1985), pp. 49–70. DOI: 10.1016/0196-6774(85)90018-5.

[8] Claude Berge. "Two theorems in graph theory". Em: *Proc. National Acad. Science* 43 (1957), pp. 842–844.

[9] John R. Black Jr. e Charles U. Martel. *Designing Fast Graph Data Structures: An Experimental Approach*. Rel. téc. Department of Computer Science, University of California, Davis, 1998.

[10] G. S. Brodal, R. Fagerberg e R. Jacob. *Cache Oblivious Search Trees via Binary Trees of Small Height*. Rel. téc. RS-01-36. BRICS, 2001.

[11] Andrei Broder e Michael Mitzenmacher. "Network applications of Bloom filter: A survey". Em: *Internet Mathematics* 1.4 (2003), pp. 485–509.

[12] Bernhard Chazelle. "A Minimum Spanning Tree Algorithm with Inverse-Ackermann Type Complexity". Em: *Journal ACM* 47 (2000), pp. 1028–1047.

[13] Thomas H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms*. 3rd. The MIT Press, 2009.

[14] Ivan Damgård, Peter Landrock e Carl Pomerance. "Average case error estimates for the strong probable prime test". Em: *Mathematics of computation* 61.203 (1993), pp. 177–194.

[15] Brian C. Dean, Michel X. Goemans e Nicole Immorlica. "Finite termination of "augmenting path"algorithms in the presence of irrational problem data". Em: *ESA'06: Proceedings of the 14th conference on Annual European Symposium*. Zurich, Switzerland: Springer-Verlag, 2006, pp. 268–279. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/11841036_26.

[16] R. Dementiev et al. "Engineering a Sorted List Data Structure for 32 Bit Keys". Em: *Workshop on Algorithm Engineering & Experiments*. 2004, pp. 142–151.

[17] Ran Duan, Seth Pettie e Hsin-Hao Su. "Scaling algorithms for approximate and exact maximum weight matching". Em: *CoRR* abs/1112.0790 (2011).

[18] J. Edmonds. "Paths, Trees, and Flowers". Em: *Canad. J. Math* 17 (1965), pp. 449–467.

[19] J. Edmonds e R. Karp. "Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems". Em: *JACM* 19.2 (1972), pp. 248–264.

[20] Jenő Egerváry. "Matrixok kombinatorius tulajdonságairól (On combinatorial properties of matrices)". Em: *Matematikai és Fizikai Lapok* 38 (1931), pp. 16–28.

[21] T. Feder e R. Motwani. "Clique partitions, graph compression and speeding-up algorithms". Em: *Proceedings of the Twenty Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (23rd STOC)*. 1991, pp. 123–133.

[22] T. Feder e R. Motwani. "Clique partitions, graph compression and speeding-up algorithms". Em: *Journal of Computer and System Sciences* 51 (1995), pp. 261–272.

[23] L. R. Ford e D. R. Fulkerson. "Maximal flow through a network". Em: *Canadian Journal of Mathematics* 8 (1956), pp. 399–404.

[24] C. Fremuth-Paeger e D. Jungnickel. "Balanced network flows VIII: a revised theory of phase-ordered algorithms and the $O(\sqrt{n}m\log(n^2/m)/\log n$ bound for the nonbipartite cardinality matching problem". Em: *Networks* 41 (2003), pp. 137–142.

[25] Martin Fürer e Balaji Raghavachari. "Approximating the minimu-degree steiner tree to within one of optimal". Em: *Journal of Algorithms* (1994).

[26] H. N. Gabow. “Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking”. Em: *Proc. of the 1st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1990), pp. 434–443.

[27] Ashish Goel, Michael Kapralov e Sanjeev Khanna. “Perfect Matchings in $O(n \log n)$ Time in Regular Bipartite Graphs”. Em: *STOC 2010*. 2010.

[28] A. V. Goldberg e A. V. Karzanov. “Maximum skew-symmetric flows and matchings”. Em: *Mathematical Programming A* 100 (2004), pp. 537–568.

[29] Olivier Goldschmidt e Dorit S. Hochbaum. “Polynomial Algorithm for the k-Cut Problem”. Em: *Proc. 29th FOCS*. 1988, pp. 444–451.

[30] Ronald Lewis Graham, Donald Ervin Knuth e Oren Patashnik. *Concrete Mathematics: a foundation for computer science*. Addison-Wesley, 1988.

[31] J. Hadamard. “Sur la distribution des zéros de la fonction zeta(s) et ses conséquences arithmétiques”. Em: *Bull. Soc. math. France* 24 (1896), pp. 199–220.

[32] Bernhard Haeupler, Siddharta Sen e Robert E. Tarjan. “Heaps simplified”. Em: *(Preprint)* (2009). arXiv:0903.0116.

[33] Carl Hierholzer. “Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren”. Em: *Mathematische Annalen* 6 (1873), pp. 30–32. DOI: 10.1007/bf01442866.

[34] J. E. Hopcroft e R. Karp. “An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs”. Em: *SIAM J. Comput.* 2 (1973), pp. 225–231.

[35] David S. Johnson. “Near-optimal bin packing algorithms”. Tese de doutoramento. Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Mathematics, 1973. URL: http://hdl.handle.net/1721.1/57819.

[36] David S. Johnson e Michael R. Garey. “A 71/60 theorem for bin packing”. Em: *J. Complex.* 1.1 (1985), pp. 65–106. DOI: 10.1016/0885-064X(85)90022-6.

[37] Michael J. Jones e James M. Rehg. *Statistical Color Models with Application to Skin Detection*. Rel. téc. CRL 98/11. Cambridge Research Laboratory, 1998.

[38] Haim Kaplan e Uri Zwick. “A simpler implementation and analysis of Chazelle’s soft heaps”. Em: *SODA ’09: Proceedings of the Nineteenth Annual ACM -SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. New York, New York: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2009, pp. 477–485.

[39] H. W. Kuhn. “The Hungarian Method for the assignment problem”. Em: *Naval Re4search Logistic Quarterly* 2 (1955), pp. 83–97.

[40] Jerry Li e John Peebles. "Replacing Mark Bits with Randomness in Fibonacci Heaps". Em: *Int. Coloq. Automata, Languages, and Progr.* Ed. por Magnús Halldórsson et al. Vol. 9134. LNCS. 2015, pp. 886–897.

[41] L. Monier. "Evaluation and comparison of two efficient probabilistic primality testing algorithms". Em: *Theoret. Comp. Sci.* 12 (1980), pp. 97–108.

[42] J. Munkres. "Algorithms for the assignment and transporation problems". Em: *J. Soc. Indust. Appl. Math* 5.1 (1957), pp. 32–38.

[43] K. Noshita. "A theorem on the expected complexity of Dijkstra's shortest path algorithm". Em: *Journal of Algorithms* 6 (1985), pp. 400–408.

[44] Joon-Sang Park, Michael Penner e Viktor K. Prasanna. "Optimizing Graph Algorithms for Improved Cache Performance". Em: *IEEE Trans. Par. Distr. Syst.* 15.9 (2004), pp. 769–782.

[45] Michael O. Rabin. "Probabilistic algorithm for primality testing". Em: *J. Number Theory* 12 (1980), pp. 128–138.

[46] Emma Roach e Vivien Pieper. "Die Welt in Zahlen". Em: *Brand eins* 3 (2007).

[47] J.R. Sack e J. Urrutia, eds. *Handbook of computational geometry.* Elsevier, 2000.

[48] Alexander Schrijver. *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency.* Vol. A. Springer, 2003.

[49] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.

[50] Terrazon. *Soft Errors in Electronic Memory – A White Paper.* Rel. téc. Terrazon Semiconductor, 2004.

[51] C.-J. de la Vallée Poussin. "Recherches analytiques la théorie des nombres premiers". Em: *Ann. Soc. scient. Bruxelles* 20 (1896), pp. 183–256.

[52] Norman Zadeh. "Theoretical Efficiency of the Edmonds-Karp Algorithm for Computing Maximal Flows". Em: *J. ACM* 19.1 (1972), pp. 184–192.

[53] Uri Zwick. "The smallest networks on which the Ford-Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate". Em: *Theoretical Computer Science* 148.1 (1995), pp. 165–170. DOI: DOI:10.1016/0304-3975(95)00022-O.

Índice